

توسعه رویکرد تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره با معیارهای وابسته

وحید برادران*^۱، رضا برادران کاظم‌زاده^۲، امیرحسین امیری^۳ و حامد موگویی^۴

^۱ استادیار گروه مهندسی صنایع - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران شمال

^۲ دانشیار بخش مهندسی صنایع - دانشگاه تربیت مدرس

^۳ استادیار گروه مهندسی صنایع - دانشگاه شاهد

^۴ کارشناس ارشد مهندسی صنایع - دانشگاه شاهد

(تاریخ دریافت ۹۰/۱۱/۸، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۰/۱۱/۱۵، تاریخ تصویب ۹۱/۴/۴)

چکیده

فرض اساسی در برخی از روش‌های حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره، استقلال آماری معیارها است که نقض آن منجر به حصول نتایج نادرست خواهد شد. این در حالی است که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، اغلب معیارها به یکدیگر وابسته هستند. در این مقاله، رویکردی بر اساس خاصیت مستقل‌سازی روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی، برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره در حالت وجود معیارهای وابسته، پیشنهاد شده است. در رویکرد جدید با دخالت دادن وزن معیارها در روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی، اقدام به ایجاد متغیرهای (معیارها) جدید مستقل به همراه وزن‌های آنها و ایجاد شرایط اولیه روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره شده است. همچنین روشی برای تعیین جهت متغیرهای جدید مستقل از نظر کمینه یا بیشینه‌بودن آنها ارائه شده است. در نهایت اعتبار روش پیشنهادی با استفاده از دو رویکرد متفاوت در قالب یک مطالعه موردی و یک مثال عددی بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)، تصمیم‌گیری چندمعیاره (MADM)، وابستگی معیارها

مقدمه

اساسی توجهی نمی‌شود [۵]. به عنوان مثال Zanakis و همکاران [۶] روش‌های MADM را با روش SAW^۵ مقایسه کرده و در انجام شبیه‌سازی‌ها به این شرط مهم توجه نکرده‌اند.

روش‌های متعددی برای برقراری استقلال آماری معیارها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به حذف معیارهای وابسته اشاره کرد. در این روش، یکی از معیارهای وابسته به عنوان نماینده حفظ می‌شود و بقیه معیارها حذف می‌شوند و وزن آنهایی که حذف شده است به نماینده آنها واگذار می‌شود. Tzeng و همکاران [۴] الگوریتمی مبتنی بر مقادیر فازی ارائه کرده‌اند که نیازی به استقلال معیارها نیست. روش نرخ حاشیه‌ای جانیشینی^۶ نیز برای ایجاد معیارهای مستقل پیشنهاد شده است [۱]. در این روش، معیارها به صورت زوجی به همدیگر وابسته بوده ولی هر زوج، مستقل از زوج معیارهای دیگر است. برای هر زوج معیار، مقدار یکی از معیارها ثابت فرض شده و با استفاده از منحنی‌های بی‌تفاوتی مقدار معادل برای

تصمیم‌گیرنده در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره (MADM)^۱، با مسئله انتخاب یک گزینه از بین چندین گزینه محدود روبه‌روست [۱]. در این نوع مسائل، هر یک از گزینه‌ها نسبت به یک یا چندین معیار (شاخص) مستقل کمی (مانند هزینه) و یا کیفی (مانند زیبایی) ارزیابی می‌شوند.

مدل‌ها و تکنیک‌های حل مسائل چندمعیاره را می‌توان به دو دسته مدل‌های غیرجبرانی^۲ (روش‌هایی که در آنها تبادل^۳ بین معیارها مجاز نیست) و مدل‌های جبرانی^۴ (روش‌هایی که هر تغییری در یک معیار می‌تواند توسط تغییری مخالف در معیار (یا معیارهای) دیگر جبران شود) تقسیم‌بندی کرد [۲].

خصوصیت بارز مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره، استقلال آماری معیارها است. نبود این شرط منجر به کسب نتایج دور از واقعیت و غیرحقیقی خواهد شد [۳-۵]. هر چند در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقع، معیارها به هم وابسته‌اند، اما در حل آنها به این شرط

است. بخش «مطالعات موردی و اعتبارسنجی روش پیشنهادی» مشتمل بر یک مطالعه موردی و یک مثال عددی است که به مقایسه عملکرد روش پیشنهادی با روش‌های دیگر می‌پردازد و اعتبارسنجی رویکرد پیشنهادی در این بخش ارائه شده است. بخش پایانی به ارائه نتایج مقاله اختصاص یافته است.

مروری بر تصمیم‌گیری چندمعیاره و تحلیل مؤلفه‌های اصلی

تصمیم‌گیری چندمعیاره

مدل‌های حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره را مدل‌های انتخاب‌گر می‌گویند. انتخاب‌گر بدین معنی که مناسب‌ترین گزینه از بین m گزینه موجود و با در نظر گرفتن فاکتورهای تأثیرگذار در تصمیم‌گیری، انتخاب می‌شود. مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره اغلب توسط جدول (۱) (ماتریس تصمیم) فرموله می‌شود [۱]:

جدول ۱: ماتریس تصمیم

	X_1	X_2	...	X_n
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}
...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}

به طوری که A_i نشان‌دهنده گزینه i ام (مواردی که باید رتبه‌بندی شوند) و X_j نشان‌دهنده معیار j ام (معیارهای تصمیم‌گیری) و r_{ij} نشان‌دهنده ارزش معیار j ام برای گزینه i ام است.

معیارها در ماتریس تصمیم می‌توانند کمی و یا کیفی باشند و ارزش معیارها به ازای هر گزینه نیز با مقیاس و واحدهای متفاوتی اندازه‌گیری شوند. هدف در مسائل MADM، پیدا کردن مطلوب‌ترین گزینه (A^*) است، به طوری که ارجح‌ترین ارزش (یا مطلوبیت) از هر معیار موجود با توجه به وزن‌های متفاوتی که برای هر معیار در نظر گرفته می‌شود را تأمین کند. اغلب قبل از استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری باید عملیات بی‌مقیاس کردن ارزش‌ها و تعیین اوزان معیارها روی ماتریس تصمیم انجام شود [۱].

معیار دیگر برای هر گزینه تعیین می‌شود. به این ترتیب معیارهای وابسته حذف می‌شوند و در نهایت ماتریس تصمیم با معیارهای مستقل باقی می‌ماند. نبود زوج معیارهای مستقل در مسئله و دشواری رسم منحنی‌های بی‌تفاوتی، از مشکلات عمده این روش است.

تکنیک تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)، رویکردی ریاضی برای تحلیل مسائل چندمتغیره^۸ است. مستقل کردن متغیرهای وابسته و کاهش تعداد متغیرها از خواص این تکنیک است. Lam و همکاران [۷] در یک مسئله تصمیم‌گیری برای انتخاب پیمانکاران، برای کاهش تعداد معیارهای اولیه انتخاب پیمانکاران، از روش PCA استفاده کرده‌اند. Polat و Günes [۸] در یک مسئله تصمیم‌گیری پزشکی برای شناسایی سه معیار مهم‌تر از بین معیارهای مؤثر بر عملکرد غده تیروئید، از روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی بهره برده‌اند. Tong و همکاران [۹ و ۱۰] از خاصیت تولید متغیرهای مستقل روش PCA در مسائل طراحی آزمایش‌های چندپاسخه به منظور مستقل‌سازی متغیرهای پاسخ و به کارگیری آنها در روش تاگوچی و بهینه‌سازی استفاده کرده‌اند. در یک مسئله مکان‌یابی که توسط Ayoko و همکاران ارائه شده است، برای یافتن محل مناسب برای انجام مطالعات وضعیت آب و هوای منازل مسکونی، برای مستقل‌سازی برخی معیارهای وابسته، از PCA استفاده شده است [۱۱]. برادران کاظم‌زاده و همکاران [۱۲] از رویکرد PCA برای مستقل‌کردن مشخصه‌های کیفی چندمتغیره در کنترل فرایندها استفاده کردند و برای کنترل هر مؤلفه از یک نمودار کنترلی مستقل به جای استفاده از یک نمودار کنترلی چندمتغیره استفاده کردند.

در این مقاله، از خاصیت مستقل‌سازی متغیرها در تکنیک تحلیل مؤلفه‌های اصلی استفاده شده و رویکردی جدید برای حل مسایل تصمیم‌گیری چندمعیاره با وجود معیارهای وابسته ارائه شده است.

بخش بعدی، مروری بر ماهیت و شکل مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره و اصول پایه‌ای و مفاهیم تحلیل مؤلفه‌های اصلی می‌شود. در بخش «رویکرد جدید حل مسائل MADM در حالت وجود معیارهای وابسته»، تکنیک تحلیل مؤلفه‌های اصلی برای مستقل‌سازی معیارها، توسعه داده شده و رویکرد جدید تشریح شده

تحلیل مؤلفه‌های اصلی

این روش برای اولین بار توسط پیرسن در سال ۱۹۰۱ برای حل بعضی از مسائل دانشمندان بیومتری پیشنهاد شد [۱۳]. در سال ۱۹۳۳ روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) توسط هاتلینگ بسط داده شد و در سال ۱۹۶۴ راثو به تفصیل بیشتر و انعکاس کاربرد آن پرداخت [۱۴].

در تحلیل جامعه‌های چندمتغیره برای کاهش تعداد متغیره به تعداد کمتری متغیر و در جهت خلاصه کردن و منسجم کردن اطلاعات و تعبیر و تفسیر آنها از تحلیل مؤلفه‌های اصلی استفاده می‌شود. اگر p متغیر برای مطالعه تغییرپذیری کل سیستم لازم باشد، در اغلب اوقات می‌توان این تغییرپذیری را با تعداد کمتری مؤلفه (متغیر) مثلاً k مؤلفه اصلی بیان کرد ($k \leq p$). در این صورت میزان اطلاعاتی که در k مؤلفه وجود دارد، تقریباً در p متغیر اولیه نیز است. بنابراین k مؤلفه اصلی را می‌توان به جای p متغیر اولیه به کار برد و مجموعه داده‌های اولیه که شامل n مشاهده روی p متغیر است را به مجموعه‌ای از داده‌ها شامل n مشاهده در مورد k مؤلفه اصلی کاهش داد. مطلب ذکر شده یکی از اهداف روش PCA، معروف به اصل کاهش داده‌ها^۱ است [۱۵].

اما اغلب هدف دیگری از به کارگیری روش PCA دنبال می‌شود و آن استفاده از ترکیب خطی p متغیر اولیه برای رسیدن به p معیار غیروابسته است. عدم همبستگی به این معنی است که معیارها هر یک جنبه‌های متفاوتی از داده‌ها را توضیح می‌دهند [۱۶].

تحلیل مؤلفه‌های اصلی، وسیله‌ای برای رسیدن به هدف هستند تا این که خودشان هدف باشند، از PCA به عنوان ورودی رگرسیون چندگانه، تحلیل خوشه‌ای، تحلیل عاملی و رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌شود [۱۷].

مؤلفه‌های اصلی از نظر جبری، ترکیب خطی ویژه p متغیر تصادفی X_1, X_2, \dots, X_p است. این ترکیب خطی از نظر هندسی یک دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که از دوران دستگاه اولیه با X_1, X_2, \dots, X_p به عنوان محورهای مختصات به دست می‌آیند. محورهای جدید، جهت‌ها را با بیشترین تغییرپذیری نشان می‌دهند و بیان ساده‌تری از ساختار کواریانس را فراهم می‌کنند که در آن ماتریس کواریانس مؤلفه‌های اصلی قطری می‌شود که معرف استقلال مؤلفه‌های اصلی جدید است [۱۵ و ۱۶].

فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ دارای ماتریس واریانس-کواریانس Σ با مقادیر ویژه λ_i ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0$) باشد. (مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی \mathbf{A} از حل دستگاه معادلات $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ حاصل می‌شود)

ترکیبات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mathbf{C}'_1 \mathbf{X} = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \dots + c_{1p}X_p \\ Y_2 &= \mathbf{C}'_2 \mathbf{X} = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \dots + c_{2p}X_p \\ &\vdots \\ Y_p &= \mathbf{C}'_p \mathbf{X} = c_{p1}X_1 + c_{p2}X_2 + \dots + c_{pp}X_p \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن X_j ها متغیرهای اولیه و Y_i ها مؤلفه‌های جدید هستند که از ترکیب خطی متغیرهای اولیه (X_j) حاصل شده‌اند و بردار $\mathbf{C}'_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ip}]$ ، بردار ضرایب متغیرهای اولیه در مؤلفه جدید نام است. بردار ضرایب (\mathbf{C}'_i) باید به گونه‌ای تعیین شوند که واریانس هر یک از مؤلفه‌های اصلی به ازای آنها ماکزیمم شود ($Max[Var(Y_i)]$) و کواریانس بین هر دو مؤلفه اصلی Y_i و Y_j صفر شود ($Cov(Y_i, Y_j) = 0$) تا مؤلفه‌های اصلی جدید ناهمبسته شوند.

نتایجی که از تحلیل مؤلفه‌های اصلی به دست می‌آید عبارتند از [۱۵]:

۱- به ازای هر i داریم:

$$Var(Y_i) = \mathbf{C}'_i \Sigma \mathbf{C}_i = \lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

۲- به ازای هر دو مؤلفه اصلی جدید داریم:

$$Cov(Y_i, Y_j) = \mathbf{C}'_i \Sigma \mathbf{C}_j = 0$$

۳- مؤلفه‌های اصلی ناهمبسته بوده و واریانس آنها برابر مقدار ویژه ماتریس واریانس-کواریانس متغیرهای اولیه (Σ) است.

۴- ضرایب c_{ik} از بردار \mathbf{C}'_i برای مؤلفه اصلی نام در ترکیب خطی فوق، از حل دستگاه ذیل حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} (\Sigma - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{C}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i = 1 \end{cases} \quad (2)$$

۵- ضرایب ترکیب‌های خطی نرمال هستند ($\mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i = 1$)

۶- برای هر مؤلفه اصلی متناظر با متغیر اولیه داریم:

$$\sum_{i=1}^p Var(X_i) = \sum_{i=1}^p Var(Y_i)$$

داده‌های نرمال در تکنیک PCA، دقت این روش را افزایش می‌دهد.

از دو تابع ذیر می‌توان برای نرمال‌سازی داده‌های ماتریس تصمیم استفاده کرد:

$$z_{ij} = \frac{r_j^{\min}}{r_{ij}} \quad (۳)$$

$$z_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_j^{\max}} \quad (۴)$$

رابطه (۳) برای معیارهای منفی و رابطه (۴) برای معیارهای مثبت استفاده می‌شود. استفاده از رابطه (۳) علاوه بر اینکه داده‌های معیار منفی را بی‌مقیاس می‌کند و همه ارزش‌های آن بین ۰ و ۱ قرار می‌گیرند، معیار منفی را به معیار مثبت تبدیل می‌کند.

مرحله ۲- وزن هر ستون (معیار/متغیر) در ماتریس تصمیم (w_j) را در مقادیر ارزش‌های همان ستون (Z_{ij}) ضرب کنید تا متغیرهای جدید $Z'_{ij} = w_j \times Z_{ij}$ با مقادیر حاصل Z'_{ij} (جدول ۲). با این کار درجه اهمیت هر معیار در ضرایب ترکیب خطی PCAها (c_{ij}) تأثیر داده می‌شود، کاری که در رتبه‌بندی سنتی توسط PCA انجام نمی‌گیرد. همان طور که در نتایج PCA اشاره شد، واریانس هر مؤلفه اصلی جدیدی که تشکیل می‌شود برابر مقدار ویژه ماتریس واریانس-کواریانس داده‌های ماتریس تصمیم اولیه است. زمانی که وزن‌ها در داده‌ها ضرب می‌شوند، وزن‌ها اثر خود را روی مقادیر ویژه ماتریس واریانس-کواریانس (\sum) می‌گذارند و به این صورت، این اثر به مقادیر ویژه منتقل می‌شود. از آنجا که ضرایب مؤلفه‌های اصلی نیز از مقادیر ویژه تشکیل می‌شوند، بنابراین درجه اهمیت هر معیار در ضرایب ترکیب خطی مؤلفه‌های اصلی وارد می‌شود. به عبارت دیگر تفاوت‌های بین معیارها از نظر تصمیم‌گیرنده وارد داده‌هایی شده که ممکن است تصمیم‌گیرنده در ارزش‌دهی به آنها نقشی نداشته است (مثل معیار قیمت برای هر گزینه).

مرحله ۳- ماتریس واریانس-کواریانس اصلاح شده مرحله قبل (\sum) را تشکیل دهید و از روی آن، مقادیر ویژه آن را محاسبه کنید. مقادیر ویژه، در محاسبه ضرایب ترکیب خطی مؤلفه‌های اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. تعداد مقادیر ویژه که از معادلات رابطه (۵) حاصل می‌شود برابر تعداد معیارهای اولیه است.

۷- نسبتی از واریانس کل که توسط مؤلفه اصلی k ام

بیان می‌شود برابر است با: $\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$

۸- مقدار c_{ik} در بردار ویژه $C'_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ip}]$ اهمیت متغیر k ام را در مؤلفه اصلی i ام، صرف نظر از متغیرهای دیگر نشان می‌دهد.

۹- ضریب همبستگی بین مؤلفه اصلی Y_i با متغیر X_r از رابطه $\rho_{Y_i, X_r} = \frac{c_{ri} \sqrt{\lambda_r}}{\sqrt{\text{Var}(X_r)}}$ محاسبه می‌شود.

۱۰- واریانس زیاد داده‌های استاندارد نشده تأثیر زیادی روی ضریب ترکیبات خطی آن متغیر می‌گذارد.

رویکرد جدید حل مسائل MADM در حالت وجود معیارهای وابسته

در این بخش رویکرد جدیدی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره در حالت وجود معیارهای وابسته ارائه می‌شود. همان طور که اشاره شد ضرورت استقلال آماری معیارها در ماتریس تصمیم از یک طرف و خاصیت مستقل‌سازی متغیرها در روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی از طرف دیگر، امکان ارائه رویکرد جدیدی برای رفع مشکل وابستگی معیارها در مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره را فراهم می‌کند.

ورودی این مدل همانند مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره از تعدادی معیار (X_j)، وزن معیارها (w_j) و ماتریس تصمیم شامل ارزش‌های هر گزینه برای هر معیار (r_{ij})، تشکیل شده است. نکته قابل توجه آنکه معیارها می‌توانند معیارهای مثبت و منفی باشند. منظور از معیارهای مثبت، معیارهایی است که هر چه ارزش آن معیار (r_{ij}) بیشتر باشد، مطلوبیت تصمیم‌گیرنده نیز بیشتر می‌شود (مثل سرعت، زیبایی، ...) و برعکس، معیارهای منفی، معیارهایی مانند هزینه هستند که هر چه کمتر باشد، مطلوب‌ترند.

مراحل الگوریتم

مرحله ۱- مقادیر هر یک از ستون‌های ماتریس تصمیم را نرمال کنید. نرمال کردن یا بی‌مقیاس‌سازی داده‌های ماتریس تصمیم، باعث حذف واحد معیارها و هم‌مقیاس‌شدن ارزش‌ها می‌شود. همچنین استفاده از

کرد و یک ماتریس جدید با مقادیر امتیازات مؤلفه‌های اصلی (Y_{ij}) به شکل جدول (۳) تشکیل داد.

جدول ۳: ماتریس امتیاز مؤلفه‌های اصلی جدید

	Y_1	Y_2	...	Y_n
A_1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1n}
A_2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2n}
...
A_m	Y_{m1}	Y_{m2}	...	Y_{mn}

$$Y_{11} = c_{11}Z'_{11} + c_{12}Z'_{12} + \dots + c_{1n}Z'_{1n}$$

همان طور که اشاره شد، مؤلفه‌های اصلی تشکیل شده (ستون‌های ماتریس قبلی) مستقل از هم هستند. یعنی ماتریس واریانس-کواریانس مؤلفه‌های جدید قطری می‌شود و عناصر قطر اصلی آن که معرف واریانس Y_i است، برابر مقادیر ویژه‌ای است که قبلاً برای ماتریس مرحله ۱ محاسبه شد (λ_i). اکنون این ماتریس می‌تواند ورودی مدل‌های MADM باشد که شرط استقلال معیارها برای آن به وجود آمده است.

مرحله ۶- در این مرحله وزن هر معیار جدید (مؤلفه اصلی) باید تعیین شود. یکی از روش‌های وزن‌دهی معیارها در روش‌های تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره، روش آنتروپی است. در روش آنتروپی، واریانس هر متغیر در ماتریس تصمیم (جدول ۱) به عنوان وزن معیار مربوطه در نظر گرفته می‌شود. بنابراین وزن معیارهای جدید (Y_i) را نیز می‌توان واریانس آنها که مقدار آن برابر مقادیر ویژه محاسبه شده برای هر معیار (λ_i) است، در نظر گرفت.

$$(\lambda_i = \text{Var}(PC_i) = \text{Var}(Y_i))$$

$$\lambda_i = \text{Var}(Y_i) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n c_{ij}Z'_j\right) = \quad (A)$$

$$\text{Var}\left[\sum_{j=1}^n c_{ij}(w_j Z_j)\right] = \left(\sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \times (w_j)^2 \times \text{Var}(Z_j)\right)$$

از طرف دیگر، طبق رابطه (۸) واریانس هر متغیر جدید ($\lambda_i = \text{Var}(Y_i)$) تابعی از واریانس متغیرهای اولیه (Z_j)، مجذور ضرایب مؤلفه‌های اصلی (C_{ij}^2) و مجذور اوزان معیارهای اولیه (W_j^2) است. این بدین معنی است که هر متغیر اولیه‌ای که در تشکیل متغیر جدید نقش بیشتری داشته باشد، (وزن معیار اولیه و ضرایب C_{ij} های بزرگتر) اهمیت آن مؤلفه اصلی را نسبت به سایر

$$|\Sigma - \lambda I| = 0 \quad (5)$$

در مواردی که از PCA استفاده می‌شود، ممکن است از ماتریس همبستگی به جای ماتریس واریانس-کواریانس استفاده شود، در حالی که در اینجا استفاده از ماتریس همبستگی مجاز نیست؛ چون اثر اوزان معیارها در مقادیر ویژه ماتریس همبستگی حذف می‌شوند. دلیل آن را می‌توان در رابطه تعریف ضرایب همبستگی (رابطه ۶) دنبال کرد:

$$\rho_{Y_i, Y_j} = \frac{\text{Cov}(w_i X_i, w_j X_j)}{\sqrt{\text{Var}(w_i X_i) \times \text{Var}(w_j X_j)}} = \frac{w_i w_j \text{Cov}(X_i, X_j)}{w_i w_j \sqrt{\text{Var}(X_i) \times \text{Var}(X_j)}} = \rho_{X_i, X_j} \quad (6)$$

مرحله ۴- با توجه به مقادیر ویژه مرحله قبل، ضرایب هر ترکیب خطی (C_{ij}) معیارهای اولیه (Z'_j) در مؤلفه‌های اصلی جدید را از حل دستگاه معادلات (۲) محاسبه کنید.

مرحله ۵- اکنون می‌توان معادلات مؤلفه‌های اصلی را برحسب معیارهای نرمال و ضرب شده در اوزان معیارها بر اساس روابط (۷) به دست آورد. بردار بردارهای $C'_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}]$ و $Y' = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ و $Z' = [Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_n]$ به ترتیب بردار متغیرهای تشکیل شده در گام دوم و بردار مؤلفه‌های اصلی تشکیل شده هستند.

جدول ۲: ماتریس ضرب ارزش‌های نرمال شده در اوزان معیارها

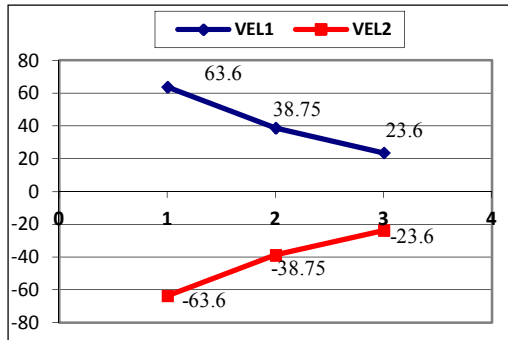
$$(Z'_{ij} = Z_{ij} \times W_j)$$

	Z'_1	Z'_2	...	Z'_n
A_1	Z'_{11}	Z'_{12}	...	Z'_{1n}
A_2	Z'_{21}	Z'_{22}	...	Z'_{2n}
...
A_m	Z'_{m1}	Z'_{m2}	...	Z'_{mn}

$$\begin{cases} Y_1 = C'_1 Z' = c_{11}Z'_1 + c_{12}Z'_2 + \dots + c_{1n}Z'_n \\ Y_2 = C'_2 Z' = c_{21}Z'_1 + c_{22}Z'_2 + \dots + c_{2n}Z'_n \\ \vdots \\ Y_n = C'_n Z' = c_{n1}Z'_1 + c_{n2}Z'_2 + \dots + c_{nn}Z'_n \end{cases} \quad (7)$$

امتیاز هر مؤلفه اصلی را بر اساس مقادیر Z'_{ij} (مقدار متغیر Z'_j در ردیف i ام جدول ۲) می‌توان محاسبه

در روابط ذکر شده، بردارهای $VEL_1(PC_i)$ و $VEL_2(PC_2)$ به ترتیب حدود بالا و پایین تغییرات هر متغیر در مؤلفه λ_m هستند و ضرایب c_{ij} ، ضریب متغیر λ_m در مؤلفه اصلی i ام و λ_i واریانس مؤلفه اصلی i ام است.



شکل ۱: نمودار مد تغییرات برای مؤلفه اول

برای مثال ذکر شده، حدود نمودار مد تغییرات به شکل زیر محاسبه می‌شود و نمودار آن مطابق شکل (۱) است:

$$VEL_1(PC_1) = (3c_{i1}\sqrt{\lambda_1}, 3c_{i2}\sqrt{\lambda_1}, 3c_{i3}\sqrt{\lambda_1}) = (3 \times (-0.814) \times \sqrt{678.4}, 3 \times (-0.496) \times \sqrt{678.4}, 3 \times (-0.302) \times \sqrt{678.4}) = (-63.3, -38.75, -23.6)$$

$$VEL_2(PC_1) = (63.3, 38.75, 23.6)$$

بر اساس شکل (۱)، نسبت تغییرات سه متغیر در مؤلفه اصلی به ترتیب (۶۳:۳۸:۲۳) و تقریباً (۴:۵:۸) است. یعنی به ازای افزایش (کاهش) ۸ واحدی متغیر X_1 ، انتظار افزایش (کاهش) ۵ واحدی متغیر X_2 و ۳ واحدی متغیر X_3 می‌رود و همچنین متغیرهای اصلی به همین نسبت در تشکیل مؤلفه نقش دارند [۱۸]. از طرف دیگر، مقادیر مثبت (منفی) عنصر λ_m در بردار $VEL_1(PC_i)$ بیانگر همسو (غیرهمسو) بودن جهت تغییرات مؤلفه اصلی با جهت تغییرات متغیر λ_m است. در این مثال چنانچه همه متغیرها مثبت (منفی) بودند، جهت مؤلفه با توجه به منفی بودن همه ضرایب، منفی (مثبت) می‌شد، اما چون متغیر X_3 منفی است، بنابراین نمی‌توان جهت مؤلفه را به راحتی تشخیص داد و نیاز به توسعه روش جدیدی برای تعیین جهت مؤلفه اصلی است.

چندین عامل می‌تواند بر تعیین جهت مؤلفه‌های اصلی تشکیل شده در این مقاله مؤثر باشد که در ادامه به هر یک از آنها اشاره می‌شود:

الف- مقدار و بزرگی متغیرهای اولیه: یکی از عواملی که در تعیین جهت مؤلفه اصلی مؤثر است، تفاوت مقیاس‌ها و بزرگی متغیرهای تشکیل دهنده یک مؤلفه

مؤلفه‌ها بیشتر خواهد کرد. بنابراین λ_i ها به عنوان وزن معیارهای جدید به نوعی بیانگر درجه اهمیت معیارهای تشکیل دهنده آن هستند. در نتیجه استفاده از واریانس معیارهای جدید برای وزن آنها، جهت ورودی به مدل‌های MADM کار اشتباهی نخواهد بود. البته λ_i ها باید با رابطه زیر نرمال شوند تا بتوان از آنها در مدل‌های تصمیم‌گیری استفاده کرد:

$$w'_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

اوزان بالا به همراه ماتریس مؤلفه‌های اصلی (جدول ۴)، ورودی مدل‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره خواهد بود.

مرحله ۷- از آنجایی که معیارهای جدید (مؤلفه‌های اصلی) ترکیب خطی معیارهای اولیه است، بنابراین جهت معیارهای جدید الزاماً هم‌جهت با معیارهای اولیه نیستند. فرض کنید متغیرهای X_1 ، X_2 و X_3 به ترتیب معیارهای نرمال مثبت، مثبت و منفی باشند و رابطه اولین مؤلفه اصلی آنها با واریانس ۰.۶۷۸ (۳ (۶۷۸.۳) به صورت $PC_1 = -0.814X_1 - 0.496X_2 - 0.302X_3$ تعیین شده باشد؛ از آنجا که این مؤلفه از دو معیار مثبت و یک معیار منفی با ضرایب منفی تشکیل شده است، بنابراین به راحتی نمی‌توان در مورد جهت این مؤلفه قضاوت کرد. حتی زمانی که معیارها هم‌جهت نیز باشند، ممکن است ضرایب متغیرها در یک مؤلفه، همگی مثبت یا منفی نباشند که در این حالت نیز تعیین جهت مؤلفه اصلی مشکل خواهد بود.

محققانی مانند Yang و Trew [۱۸] و Tong و همکاران [۱۰]، نمودار مد تغییرات^۱ را برای بررسی الگوی تغییر متغیرها و بزرگی آنها در هر یک از مؤلفه‌های اصلی پیشنهاد دادند. نمودار مد تغییرات برای هر یک از مؤلفه‌های اصلی جداگانه ترسیم می‌شود و در آن دامنه تغییرات هر یک از متغیرها به اندازه سه برابر انحراف معیار آنها مطابق روابط (۱۰) و (۱۱) نشان داده می‌شود:

$$VEL_1(PC_i) = (3c_{i1}\sqrt{\lambda_i}, 3c_{i2}\sqrt{\lambda_i}, \dots, 3c_{ip}\sqrt{\lambda_i}) \quad (10)$$

$$VEL_2(PC_i) = -(3c_{i1}\sqrt{\lambda_i}, 3c_{i2}\sqrt{\lambda_i}, \dots, 3c_{ip}\sqrt{\lambda_i}) \quad (11)$$

ضریب اهمیت (W_j) بیشتری دارد. بنابراین وزن معیارهای اولیه (W_j) نیز در تعیین جهت مؤلفه‌های اصلی مؤثر است.

بنابراین ضرایب متغیرهای اولیه (C_{ij}) و میزان اهمیت متغیرهای اولیه (W_j) دو عامل مهم و مؤثر در تعیین جهت مؤلفه اصلی‌اند. نحوه تأثیر آنها در تعیین جهت مؤلفه اصلی طبق این رابطه پیشنهاد می‌شود:

$$d_{Y_i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \times w_j \quad (12)$$

$$d_{Y_i} \geq 0 \Rightarrow Y_i \approx LTB$$

$$d_{Y_i} < 0 \Rightarrow Y_i \approx STB$$

مثبت بودن مقدار d_{Y_i} در رابطه (۱۲) به معنای افزایش مؤلفه اصلی نام باعث افزایش مطلوبیت بیشتر معیارهای سازنده آن می‌شود. در رابطه (۱۲) مقادیر LTB^{۱۱} و STB^{۱۲} به ترتیب مثبت یا منفی، جهت مؤلفه اصلی را نشان می‌دهند.

چنانچه رابطه مؤلفه جدید نام طبق روابط (۷) و به صورت $Y_i = C'_{i1}Z'_1 + C'_{i2}Z'_2 + \dots + C'_{in}Z'_n$ باشد، همه n متغیر اولیه مثبت و نرمال‌اند. طبق تحلیل نمودار مد تغییرات، تأثیر هر یک از متغیرهای Z'_j در مقدار و جهت مؤلفه اصلی برابر ضریب متغیر (C_{ij}) است. یعنی افزایش یک واحدی متغیر Z'_j مقدار متغیر Y_i را به اندازه ضریب C_{ij} افزایش یا کاهش خواهد داد. چنانچه در رابطه بالا اهمیت همه متغیرهای اولیه برابر باشند، جمع جبری ضرایب متغیرهای اولیه، میزان تأثیر افزایش یک واحدی کل متغیرهای سازنده را در مجموع بر مؤلفه نشان خواهد داد. مثبت (منفی) بودن این مقدار که می‌توان آن را به ازای برابری اهمیت متغیرها ($w_j = \frac{1}{n}$) از رابطه (۱۲) نیز استخراج کرد، نشان‌دهنده مثبت (منفی) بودن جهت مؤلفه مربوطه است، اما زمانی که اهمیت متغیرهای سازنده متفاوت باشند، متغیری که اهمیت بیشتری دارد طبق استدلال بند (د) باید ضریب مربوط به آن نیز تأثیر بیشتری نسبت به سایر متغیرها داشته باشد. بنابراین، این موضوع در رابطه (۱۲) با ضرب وزن متغیرها در ضریب آنها و سپس جمع آنها لحاظ شده است. در حقیقت در رابطه (۱۲) بر مبنای وزن‌دهی به متغیرهای سازنده هر مؤلفه اصلی، جهت مؤلفه اصلی بر اساس مصالحه بین

اصلی است. چنانچه متغیرها از یک جنس نباشند و واحدهای اندازه‌گیری متفاوتی داشته باشند، مقدار مؤلفه اصلی به مقدار هر متغیر و دامنه تغییرات آن وابسته است، اما طبق روابط (۷)، هر مؤلفه اصلی در این مقاله، ترکیب خطی از متغیرهای اولیه مسئله‌اند که این متغیرها نرمال (همه مقادیر Z'_{ij} ها بین ۰ و ۱ هستند) و بی‌مقیاس شده‌اند. بنابراین این عامل بر جهت مؤلفه اصلی مؤثر نیست.

ب- جهت متغیرهای اولیه: همان طور که اشاره شد، متغیرهای غیرهم‌جهت، تعیین جهت مؤلفه اصلی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با استفاده از روابط (۳) و (۴) متغیرهای سازنده مؤلفه‌های اصلی در این تحقیق، به متغیرهای مثبت تبدیل شده‌اند. بنابراین بهینه‌سازی مؤلفه اصلی باید در جهتی باشد که متغیرهای اولیه سازنده مؤلفه مربوطه بیشینه شوند. بنابراین این عامل نیز در تعیین جهت مؤلفه‌های اصلی این مقاله مؤثر نیست.

ج- ضریب متغیرها در مؤلفه: طبق رابطه (۷) و نمودار مد تغییرات، مقدار هر مؤلفه اصلی تحت تأثیر ضرایب متغیرهای اولیه (C_{ij}) است که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. افزایش یک واحدی متغیر نام در مؤلفه نام (Z'_{ij}) باعث کاهش یا افزایش مقدار مؤلفه اصلی به اندازه C_{ij} واحد می‌شود، پس یکی از عوامل مؤثر بر جهت هر مؤلفه، ضرایب متغیرهای سازنده آن مؤلفه اصلی (C_{ij}) است.

د- درجه اهمیت هر متغیر: فرض کنید متغیرهای X_1 و X_2 دو متغیر نرمال مثبت باشند و یکی از مؤلفه‌های اصلی آنها به صورت $PC_1 = 0.4X_1 - 0.7X_2$ باشد؛ طبق آنچه در بند (ج) بیان شد، افزایش یک واحدی متغیر X_1 ، مقدار مؤلفه را افزایش می‌دهد و افزایش یک واحدی متغیر X_2 ، مقدار مؤلفه را کاهش می‌دهد. جهت بیشینه‌کردن متغیر اول به تنهایی، مؤلفه اصلی باید ماکزیمم شود، اما برای بهینه‌سازی منفرد متغیر دوم، مؤلفه باید مینیوم شود. چنانچه اهمیت متغیرها در بهینه‌سازی یکسان باشد، جهت مؤلفه اصلی تابع متغیری است که ضریب بزرگ‌تری در رابطه مؤلفه داشته باشد، اما زمانی که درجه اهمیت متغیرها متفاوت باشند، جهت نهایی مؤلفه اصلی باید متمایل به متغیری باشد که

مطالعات موردی و اعتبارسنجی روش پیشنهادی

در این بخش با ارائه یک مطالعه موردی و یک مثال عددی، چگونگی استفاده از الگوریتم پیشنهادی و اعتبارسنجی آن نشان داده شده است.

مطالعه موردی

در مطالعه موردی که از مرجع [۱۹] اقتباس شده، قرار است ۱۰ گزینه بر اساس دو معیار مثبت رتبه‌بندی شوند. ارزش‌هایی که برای هر معیار داده شده، در ماتریس تصمیم زیر (جدول ۴) ارائه شده است [۱۹]:

جدول ۴: ماتریس تصمیم اولیه ارزیابی گزینه‌ها

گزینه‌ها	X_1	X_2
A_1	۲	۵
A_2	۲	۱۰
A_3	۱	۹
A_4	۳	۲
A_5	۱	۸
A_6	۳	۶
A_7	۲	۲
A_8	۸	۲
A_9	۱	۳
A_{10}	۳	۳

بر اساس نظرسنجی که از کارشناسان انجام شده است، وزن معیارهای X_1 و X_2 به ترتیب $w_1 = 0.85$ و $w_2 = 0.15$ برآورد شده‌اند. ماهیت معیارهای انتخاب‌شده، نشان‌دهنده وابستگی بین متغیرها است. این موضوع از طریق ضریب همبستگی بالای متغیرها (۰.۴۷۰-) و آزمون فرض معنی‌دار بودن همبستگی با $P_Value = 0$. 171 نیز اثبات شده است.

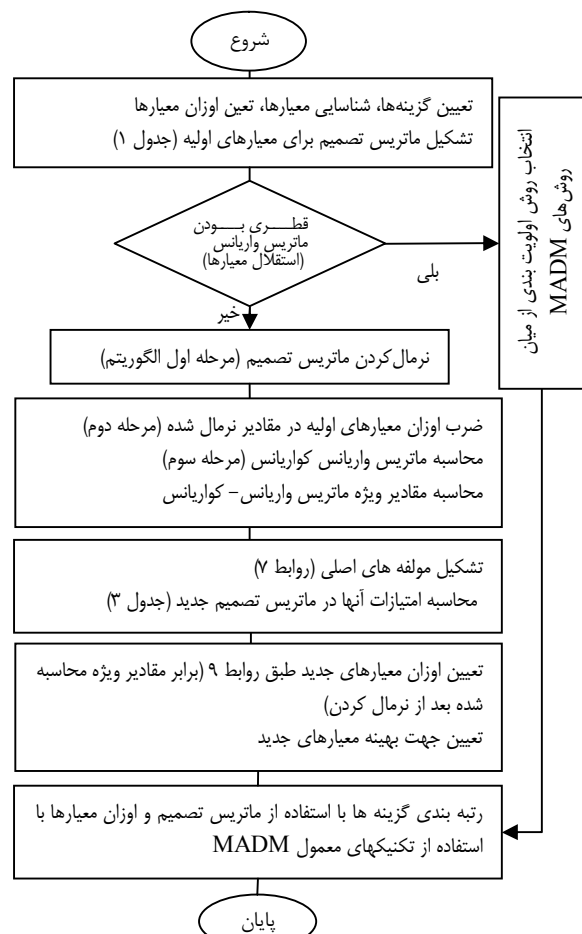
با توجه به همبستگی معیارها، نمی‌توان از داده‌های ماتریس تصمیم به طور مستقیم در برخی از مدل‌های تصمیم‌گیری استفاده کرد و نیاز است معیارهای مستقل جدیدی با استفاده از روش این مقاله محاسبه شوند. طبق الگوریتم پیشنهادی، ماتریس تصمیم اولیه (جدول ۴) طبق رابطه (۴) نرمال شده و در وزن معیارها ضرب شده است که نتایج آن در جدول (۵) قابل مشاهده است. ماتریس وارپانس- کواریانس برای داده‌های جدول (۵) محاسبه شده‌اند (جدول ۶). مقادیر ویژه ماتریس وارپانس- کواریانس متغیرهای جدید عبارتند از: $\lambda_1 = 0.049$ و $\lambda_2 = 0.002$

تأثیر همه متغیرها در جهت آن مؤلفه اصلی تعیین می‌شود.

رابطه (۱۳) توسعه رابطه (۱۲) برای تعیین جهت مؤلفه‌های اصلی زمانی که متغیرها الزاماً مثبت نیستند، نیست.

$$d_{Y_i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \times w_j \times I_{Z'_j} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳) $I_{Z'_j}$ متغیری نشانگر است. چنانچه جهت متغیر Z'_j (متغیر اولیه نرمال در رابطه (۷)) مثبت باشد، مقدار $I_{Z'_j}$ برابر ۱ ($I_{Z'_j} = 1$) و چنانچه جهت متغیر منفی باشد، مقدار $I_{Z'_j}$ برابر -1 ($I_{Z'_j} = -1$) خواهد بود.



شکل ۲: فلوچارت الگوریتم پیشنهادی

اکنون با بهره‌گیری از تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره در حالی که معیارها مستقل شده‌اند، می‌توان گزینه برتر را انتخاب کرد. الگوریتم رویکرد ارائه‌شده در شکل (۲) نشان داده شده است.

$$w'_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{0.049}{0.049 + 0.002} = 0.967 \quad (15)$$

$$w'_2 = \frac{0.002}{0.049 + 0.002} = 0.033$$

ماتریس تصمیم متغیرهای جدید (PC_i یا Y_i) (جدول ۷) و وزن‌های آنها (w'_j) که از رابطه (۱۵) به دست آمده‌اند، شرایط اولیه برای ورود به مدل‌های تصمیم‌گیری را دارند. در پایان، همان گونه که در الگوریتم پیشنهادی عنوان شد، باید جهت معیارهای جدید با استفاده از رابطه (۱۲) تعیین شوند. مقادیر dY_1 و dY_2 محاسبه نشان می‌دهد که جهت هر دو معیار جدید منفی بوده و باید کمینه (STB) شوند:

$$dY_1 = (-0.995) \times 0.85 + (0.102) \times 0.15 = -0.83 < 0$$

$$dY_2 = (-0.102) \times 0.85 + (-0.995) \times 0.15 = -0.236 < 0$$

در آخرین مرحله از الگوریتم پیشنهادی با استفاده از تکنیک SAW که در ادامه توضیح داده خواهد شد، بهترین گزینه مشخص می‌شود.

چون هر دو مؤلفه منفی هستند، با استفاده از رابطه (۳) مقادیر جدول (۷) نرمال (بدون دیمانسیون) و مثبت شده‌اند. برای هر گزینه تصمیم Z_j طبق روش SAW یک امتیاز (SAW_j) با استفاده از رابطه (۱۶) به دست می‌آید. سپس گزینه‌ها به تعداد m به ترتیب نزولی امتیازهایشان مرتب می‌شوند. جدول (۸) مقادیر دو مؤلفه اصلی، مقادیر نرمال آنها و امتیازات تعیین‌شده توسط SAW را نشان می‌دهد:

$$SAW_j = \sum_{i=1}^n w'_i \times y_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

جدول ۸: مقادیر محاسبه شده برای رتبه‌های گزینه‌ها

مؤلفه‌های اصلی		مقادیر بدون دیمانسیون		رتبه‌بندی گزینه‌ها		
PC_1	PC_2	PC'_1	PC'_2	SAW	SAW's Rank	Real Rank
-۰/۲	-۰/۱	۰/۲۴	۰/۵۶	۰/۲۵	۶	۶
-۰/۲	-۰/۱۷	۰/۲۳	۱	۰/۲۶	۵	۳
-۰/۰۹	-۰/۱۵	۰/۱۱	۰/۸۵	۰/۱۳	۸	۷
-۰/۳۱	-۰/۰۶	۰/۳۷	۰/۳۶	۰/۳۷	۴	۵
-۰/۰۹	-۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۷۶	۰/۱۳	۹	۸
-۰/۳۱	-۰/۱۲	۰/۳۷	۰/۷۱	۰/۳۸	۲	۲
-۰/۲۱	-۰/۰۵	۰/۲۵	۰/۳	۰/۲۵	۷	۹
-۰/۸۴	-۰/۱۲	۱	۰/۶۸	۰/۹۹	۱	۱
-۰/۱	-۰/۰۶	۰/۱۲	۰/۳۳	۰/۱۳	۱۰	۱۰
-۰/۳۱	-۰/۰۸	۰/۳۷	۰/۴۵	۰/۳۷	۳	۴

جدول ۵: ماتریس ضرب اوزان در مقادیر نرمال

گزینه‌ها	Z'_1	Z'_2
A_1	۰/۲۱۳	۰/۰۷۵
A_2	۰/۲۱۳	۰/۱۵
A_3	۰/۱۰۶	۰/۱۳۵
A_4	۰/۳۱۹	۰/۰۳
A_5	۰/۱۰۶	۰/۱۲
A_6	۰/۳۱۹	۰/۰۹
A_7	۰/۲۱۳	۰/۰۳
A_8	۰/۸۵	۰/۰۳
A_9	۰/۱۰۶	۰/۰۴۵
A_{10}	۰/۳۱۹	۰/۰۴۵

جدول ۶: ماتریس واریانس-کواریانس

	Z'_1	Z'_2
Z'_1	۰/۰۸۴	-۰/۰۰۵
Z'_2	-۰/۰۰۵	۰/۰۰۲

اکنون با استفاده از ماتریس واریانس-کواریانس و مقادیر ویژه آن که نرمال نیز شده‌اند، دو مؤلفه اصلی جدید مستقل به صورت ترکیب خطی از متغیرهای Z'_1 و Z'_2 به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$Y_1 = -0.995Z'_1 + 0.102Z'_2 \quad (14)$$

$$Y_2 = -0.102Z'_1 - 0.995Z'_2$$

با استفاده از داده‌های ماتریس تصمیم، متغیرهای نرمال و تعدیل‌شده (ضرب در اوزان) یعنی جدول (۵) و روابط (۱۴) ماتریس متغیرهای جدید مطابق جدول (۷) تشکیل می‌شود.

جدول ۷: ماتریس متغیرهای جدید

گزینه‌های تصمیم	Y_1-PC_1	Y_2-PC_2
A_1	-۰/۲	-۰/۱
A_2	-۰/۲	-۰/۱۷
A_3	-۰/۰۹	-۰/۱۵
A_4	-۰/۳۱	-۰/۰۶
A_5	-۰/۰۹	-۰/۱۳
A_6	-۰/۳۱	-۰/۱۲
A_7	-۰/۲۱	-۰/۰۵
A_8	-۰/۸۴۱	-۰/۱۲
A_9	-۰/۱	-۰/۰۶
A_{10}	-۰/۳۱	-۰/۰۸

اوزان معیارهای جدید که مستقل نیز هستند، برابر واریانس نرمال شده آنها است که عبارتند از:

اعتبارسنجی روش پیشنهادی (مطالعه موردی)

معیارهای تصمیم و جهت آنها (علامت مثبت نشانه معیار مثبت است) به ترتیب از C_1 تا C_{10} عبارتند از: سرعت (+)، حداکثر ارتفاع ممکن برای پرواز (+)، وزن مهمات قابل حمل (+)، قدرت مانور و گریز (+)، تعداد گلوله قابل شلیک در دقیقه (+)، دقت شلیک موشک هوا به هوا (+)، دقت شلیک موشک هوا به زمین (+)، مصرف سوخت (-)، هزینه نگهداری و تعمیرات (-) و پیچیدگی کاربری (-). همان گونه که مشخص است معیارهایی مانند سرعت و قدرت مانور و یا وزن مهمات قابل حمل و تعداد گلوله قابل شلیک با هم همبسته‌اند.

جدول ۱۰: مقادیر محاسبه شده برای رتبه‌های گزینه‌ها

گزینه	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
وزن	۲۰	۰۵۰	۰۷۰	۱۰	۰۸۰	۰۶۰	۰۹۰	۱۴۰	۱۲۰	۰۹۰
A_1	۱۳۱۰	۱۰۰۰۰	۲۹۲۳	۸۰۷	۱۷۶۰	۷۵۸	۵۵	۱۷۳۰	۶۹۵۰	۳۰۹
A_2	۱۱۸۵	۱۰۲۰۰	۳۱۵۰	۳۵۰۷	۱۹۴۵	۵۸	۴۶	۱۸۴۰	۶۵۰۰	۴۸
A_3	۱۱۹۰	۱۱۰۰۰	۳۰۵۰	۴۰۷	۱۸۱۰	۶۵۸	۳۶	۱۸۴۰	۶۵۰۰	۴۸
A_4	۱۳۵۰	۹۸۷۰	۲۸۰۰	۹۰۷	۱۷۹۵	۸۸	۶	۱۷۱۰	۶۸۵۰	۴۰۹
A_5	۱۳۶۰	۱۲۴۵۰	۲۸۰۰	۸	۱۸۰۰	۹	۸۵	۱۷۰۰	۷۰۰۰	۵۰۹
A_6	۹۸۰	۸۵۰۰	۳۷۸۰	۱۰۷	۱۹۶۰	۸۰۷	۵۸	۲۱۴۰	۵۸۰۰	۹۰۷
A_7	۱۲۵۰	۷۹۸۰	۳۰۲۰	۶۰۷	۱۷۵۰	۴۵۸	۲۶	۱۸۲۰	۶۷۵۰	۷۰۸
A_8	۱۰۰۰	۸۴۰۰	۳۸۰۰	۷	۲۰۸۰	۹۰۷	۵۸	۲۱۲۰	۵۹۵۰	۹۰۷
A_9	۸۵۰	۸۵۰۰	۳۹۴۰	۸۶	۱۹۲۰	۳۰۷	۶۸	۲۱۹۰	۵۶۵۰	۷۰۷
A_{10}	۹۷۴	۷۴۸۰	۳۸۵۰	۹۶	۲۰۰۰	۴۰۷	۸۸	۲۱۲۰	۵۷۵۰	۹۰۷
A_{11}	۱۲۴۵	۷۹۸۰	۳۰۰۰	۴۵۰۷	۱۷۸۵	۳۸	۲۶	۱۸۳۰	۶۷۵۰	۷۰۸
A_{12}	۱۱۵۴	۷۶۵۰	۲۹۰۰	۷۵۰۷	۱۷۷۰	۵۸	۳۶	۱۹۰۰	۶۳۵۰	۷۰۸
A_{13}	۱۳۵۲	۱۱۲۰۰	۲۷۲۰	۸	۱۷۳۰	۳۸	۱۶	۱۷۵۰	۶۹۲۰	۵۰۹
A_{14}	۱۰۸۹	۱۲۵۰۰	۲۷۵۰	۶۵۰۶	۱۷۵۰	۱۸	۵۶	۲۰۲۰	۶۱۰۰	۱۰۸
A_{15}	۷۸۹	۸۲۰۰	۳۴۰۰	۳۶	۱۹۰۰	۹۶	۹۰۷	۲۲۰۰	۵۴۰۰	۲۰۷
A_{16}	۹۸۷	۸۵۴۰	۳۲۰۰	۹۵۰۶	۱۷۵۰	۴۰۷	۷۸	۲۱۰۰	۵۹۵۰	۸۰۷
A_{17}	۶۸۰	۸۴۹۰	۳۴۲۰	۱۶	۲۱۲۰	۴۶	۹	۲۵۰۰	۵۰۰۰	۵۰۶
A_{18}	۷۸۴	۷۹۸۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۱۹۵۰	۷۶	۷۸	۲۲۶۵	۵۳۵۰	۳۰۷
A_{19}	۸۰۰	۹۱۰۰	۳۳۲۰	۵۶	۱۹۰۰	۸۶	۶۸	۲۲۵۰	۵۴۷۰	۵۰۷
A_{20}	۱۲۴۰	۹۸۷۵	۲۹۸۰	۵۰۷	۱۷۹۵	۴۸	۱۶	۱۸۰۰	۶۸۰۰	۶۰۸

برای حل این مسئله به کمک روش پیشنهادی، پس از نرمال‌سازی داده‌های ماتریس تصمیم با استفاده از روابط (۳) و (۴)، چهار مؤلفه اصلی با استفاده از تکنیک تحلیل مؤلفه اصلی تولید شده است. مؤلفه اول، جهت منفی (STB) و سه مؤلفه دیگر، جهت مثبت (LTB) دارند. از مؤلفه‌های حاصل‌شده و اوزان آنها به عنوان معیارهای مستقل برای رتبه‌بندی گزینه‌ها به عنوان ورودی دو روش SAW و TOPSIS^{۱۳} (یکی از روش‌ها تصمیم‌گیری چندمعیاره [۱]) استفاده شده و رتبه‌بندی‌ها بر اساس دو روش مذکور در جدول (۱۱) ارائه شده است.

اعتبارسنجی روش پیشنهادی (مثال عددی)

با استفاده از این مثال، رویکرد دیگری برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی استفاده شده است. در این

برای مقایسه نتایج روش ارائه‌شده با واقعیت و نتایج روش‌های دیگر، از افراد خبره خواسته شد با در نظر گرفتن اوزان معیارها رتبه هر گزینه را مشخص کنند. کم‌بودن تعداد معیارها باعث سهولت در تعیین رتبه‌های واقعی توسط خبرگان می‌شود. نتایج این رتبه‌بندی در ستون آخر جدول (۸) نشان داده شده است [۱۹].

برای مقایسه نتایج رویکرد جدید و رتبه‌بندی واقعی و اندازه‌گیری درجه نزدیکی نتایج رتبه‌بندی به روش جدید با واقعیت، از آزمون ناپارامتری من-ویتنی استفاده شده است.

مقدار p-value آزمون من-ویتنی برابر ۱ است، یعنی میانه دو جامعه از نظر آماری تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند، که این نشان‌دهنده نزدیکی نتایج روش ارائه‌شده و واقعیت و دلیلی بر اعتبار مدل است.

در جدول (۹) نتایج آزمون من-ویتنی (P_Value) برای مقایسه روش‌های مختلف رتبه‌بندی با رتبه‌های واقعی ارائه شده است. این روش‌ها عبارتند از:

۱- استفاده از SAW بدون در نظر گرفتن استقلال معیارها.

۲- حذف معیارهای وابسته و دادن وزن‌های معیارهای حذف‌شده به متغیر وابسته باقی‌مانده.

۳- روش پیشنهادی این مقاله با تکنیک رتبه‌بندی SAW.

۴- روش پیشنهادی این مقاله با تکنیک TOPSIS.

جدول ۹: نتایج مقایسه روش‌های مختلف با رتبه واقعی

نام روش	P_Value
روش ۱	۰/۵۲۰۵
روش ۲	۰/۷۳۳۷
روش ۳	۱
روش ۴	۱

نتایج این جدول (۹) نشان از دقیق‌تر بودن نتایج رتبه‌بندی با روش جدید نسبت به روش‌های معمولی دارد.

مثال عددی

برای نشان دادن عملکرد روش پیشنهادی این مقاله، برای مسایلی با تعداد بیشتری معیار و گزینه، یک مثال عددی با موضوع انتخاب بهترین گزینه خرید هواپیمای جنگی با ۱۰ معیار و ۲۰ گزینه (جدول ۱۰) ارائه می‌شود.

داده‌های مستقل‌شده (روش پیشنهادی) اختلاف کمتری دارند. مجموع اختلاف رتبه‌های به دست آمده از دو روش SAW و TOPSIS با شرایط معیارهای وابسته برابر ۳۲ است. این معیار که معرف اندازه اختلاف رتبه‌ها بین دو روش SAW و TOPSIS است، برای شرایطی که معیارها از هم مستقل شوند، به عدد ۲ کاهش می‌یابد. با مطالعه دقیق‌تر رتبه‌های این دو روش در حالت معیارهای مستقل، مشخص است که رتبه‌های ۳ و ۴ در دو روش با یکدیگر جابه‌جا شده‌اند و رتبه همه گزینه‌ها به جز گزینه‌های ۵ و ۱۴ (دو ستون آخر جدول ۱۴) با هم برابرند. جابه‌جایی فقط دو گزینه، در حالی که اختلاف رتبه آنها یک است، بیانگر نزدیکی گزینه‌های ۵ و ۱۴ است. بنابراین زمانی که معیارهای وابسته تبدیل به معیارهای مستقل شوند، رتبه‌بندی‌های به دست آمده با استفاده از تکنیک‌های مختلف MADM تشابه بیشتری دارند، بنابراین اطمینان به رتبه‌های حاصله نیز بیشتر است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره در حالت وجود معیارهای وابسته ارائه شد. از جمله نوآوری‌های الگوریتم پیشنهادی، می‌توان به استفاده از رویکرد آماری تحلیل مؤلفه‌های اصلی در مسائل تصمیم‌گیری اشاره کرد که با استفاده از این روش، هم می‌توان تعداد متغیرها را کاهش داد و هم آنها را از هم مستقل کرد و شرط اولیه بسیاری از روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره را محقق کرد. از مزایای دیگر الگوریتم پیشنهادی، دخالت مستقیم نظرات تصمیم‌گیرنده یا وزن معیارها در ماتریس تصمیم‌گیری و همچنین ارائه روشی برای تعیین وزن معیارهای جدید است. در انتها روشی برای تعیین جهت بهینه معیارهای جدید مستقل معرفی شده است. برای ارزیابی اعتبار الگوریتم پیشنهادی، نتایج رتبه‌بندی گزینه‌های مطرح‌شده در قالب یک مطالعه موردی و یک مثال عددی بررسی و با استفاده از آزمون ناپارامتری من-ویتنی، اعتبار مدل تأیید شده است. در مجموع، مهم‌ترین یافته این تحقیق آن است که الگوریتم پیشنهادی، توانایی پاسخگویی مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره را در حالت وجود معیارهای وابسته افزایش می‌دهد.

رویکرد، علاوه بر تعیین رتبه گزینه‌ها با استفاده از روش‌های SAW و TOPSIS و به کارگیری داده‌های مستقل‌شده (مؤلفه‌های اصلی)، رتبه‌بندی گزینه‌ها با روش‌های ذکرشده بدون مستقل‌کردن معیارها (متغیرهای اولیه) نیز انجام شده که رتبه‌های هر دو حالت در جدول (۱۱) ارائه شده است.

جدول ۱۱: رتبه گزینه‌ها در حالت‌های استقلال و وابستگی

گزینه	معیارهای وابسته		معیارهای مستقل شده	
	TOPSIS	SAW	TOPSIS	SAW
A ₁	۷	۵	۱	۱
A ₂	۴	۴	۵	۵
A ₃	۵	۸	۱۰	۱۰
A ₄	۶	۹	۸	۸
A ₅	۲	۲	۴	۳
A ₆	۱	۱	۲	۲
A ₇	۱۰	۱۳	۱۴	۱۴
A ₈	۹	۶	۶	۶
A ₉	۸	۱۲	۱۳	۱۳
A ₁₀	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶
A ₁₁	۱۲	۱۴	۱۵	۱۵
A ₁₂	۱۱	۷	۷	۷
A ₁₃	۱۳	۱۰	۹	۹
A ₁₄	۳	۳	۴	۳
A ₁₅	۱۴	۱۱	۱۱	۱۱
A ₁₆	۲۰	۲۰	۱۸	۱۸
A ₁₇	۱۵	۱۵	۱۲	۱۲
A ₁₈	۱۹	۱۸	۲۰	۲۰
A ₁₉	۱۷	۱۷	۱۹	۱۹
A ₂₀	۱۸	۱۹	۱۷	۱۷

مقایسه رتبه گزینه‌ها بین دو تکنیک SAW و TOPSIS در حالت وابسته‌بودن معیارها (متغیرهای اولیه) نشان از وجود اختلاف قابل توجهی میان نتایج دو روش دارد. به عنوان مثال رتبه گزینه پانزدهم در روش SAW، ۱۳ است. در حالی که رتبه این گزینه در روش TOPSIS، ۵ است. این اختلاف در مورد گزینه‌های دوم، چهارم و پنجم نیز مشاهده می‌شود. این انحراف در نتایج رتبه‌بندی گزینه‌ها برای یک مسئله با دو روش متفاوت چندان منطقی به نظر نمی‌رسد و نشان از وجود اشکالی در روش حل و یا ورودی‌های مسئله است، اما مقایسه نتایج رتبه‌بندی گزینه‌ها با دو روش ذکرشده برای

مراجع

- 1- Hwang, C. -L. and Yoon, K. (1981). *Multiple attribute decision making: Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*, Springer-Verlag, New York.
- 2- Yoon, K. P. and Hwang, C. -L. (1995). *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction (Quantitative Applications in the Social Sciences)*, Sage Publications, Inc.
- 3- Shen, Y. -C. , Lin, G. T. R. and Tzeng, G. -H. (2011). "Combined DEMATEL Techniques with Novel MCDM for the Organic Light Emitting Diode Technology Selection. " *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, PP. 1468–1481.
- 4- Tzeng, G. H. , Yang, Y. P. O. , Lin, C. T. and Chen, C. B. (2005). "Hierarchical MADM with Fuzzy Integral for Evaluating Enterprise Intranet Web Sites. " *Information Science*, Vol. 169, PP. 409-426.
- 5- Yang, J. L. , Chiu, H. N. , Tzeng, G. H. and Yeh, R. H. (2008). "Vendor Selection by Integrated Fuzzy MCDM Techniques with Independent and Interdependent Relationships. " *Information Sciences*, Vol. 178, PP. 4166-4183.
- 6- Zanakis, S. H. , Solomon, A. , Wishart, N. and Dublisch, S. (1998). "Multi-Attribute Decision Making: A Simulation Comparison of Select Methods. " *European Journal of Operational Research*. , Vol. 107, No. 3, PP. 507-529.
- 7- Lam, K. C. , Hu, T. S. and Ng, S. T. (2005). "Using the Principal Component Analysis Method as a Tool in Contractor Pre-Qualification. " *Construction Management and Economics*, Vol. 23, No. 7, PP. 673 – 684.
- 8- Polat, K. and Günes, S. (2006). "A Hybrid Medical Decision Making System Based on Principles Component Analysis, k-NN Based Weighted pre-Processing and Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System. " *Digital Signal Processing*, Vol. 16, No. 6, PP. 913-921.
- 9- Tong, L. I. , Chen, C. C. and Wang, C. H. (2006). "Optimization of Multi-Response Processes Using the VIKOR Method. " *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 31, No. 11-12, PP. 1049-1057.
- 10- Tong, L. , Wang, C. , Chen, C. L. and Chen, C. T. , (2004). "Dynamic Multiple Responses by Ideal Solution Analysis. " *European Journal of Operational Research*. , Vol. 156, No. 2, PP. 433-444.
- 11- Ayoko, G. , Murrawska, L. , Kokot, S. and Gilbert, D. (2004). "Application of Multicriteria Decision Making Methods to Air Quality in the Microenvironments of Residential Houses in Brisbane, Australia. " *Environmental Scientific Technology*, Vol. 38, No. 9, PP. 2609-2616.
- 12- Baradaran Kazemzadeh, R. , Noorossana, R. , Amiri, A. (2009). "Monitoring Polynomial Profiles in Quality Control Applications. " *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 42, No. 3-4, PP. 703-712.
- 13- Pearson, K. (1901). "On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. " *Philosophical Magazine*, Vol. 2, PP. 559–72.
- 14- Hotelling, H. (1933). "Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components", *Journal of Educational Psychology*, Vol. 24, No. 6, PP. 417-41.
- 15- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6th Ed. , Pearson Prentice Hall.
- 16- Shlens, J. (2005). *A Tutorial on principal Component Analysis*, [www. sn1. salk. edu/~shlens/pub/notes/pca.pdf](http://www.sn1.salk.edu/~shlens/pub/notes/pca.pdf).

-
- 17- Sharma, S. (1996). *Applied Multivariate Techniques*, John Wiley.
- 18- Yang, K. and Trewn, J. (2004). *Multivariate Statical Methods in Quality Management*, Mc Graw Hill.
- 19- Behzadian, Mahmood (2001). "Integration of Principal Components Anaysis and Data Envelopment Analysis." Tehran: Iran University Tehchnology and Science, (persian).

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Multiple Attribute Decision Making
 - 2- Non-Compensatory
 - 3- Trade-Off
 - 4- Compensatory
 - 5- Sum Addetive Weighting
 - 6- Marginal Rate of Substitution
 - 7- Principal Component Anaysis
 - 8- Multivariate Analysis
 - 9- Data Reduction
 - 10- Variation Mode Chart
 - 11- Larger the better
 - 12- Smaller the better
 - 13- Technique for Order Perference by Similarity to Idea Solution
-