

تخمین و بهینه‌سازی پایایی در مدل مقاومت- تنش به روش سطح پاسخ

طه حسین حجازی^۱، میرمهدی سیداصفهان‌ی^{۱*} و اسماعیل خرم^۲

^۱ دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌های مدیریت- دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران

^۲ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر- دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران

(تاریخ دریافت ۹۰/۱۱/۸، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۰/۱۲/۱، تاریخ تصویب ۹۱/۶/۱۸)

چکیده

در طراحی آزمایش‌ها، هدف، شناسایی و تحلیل متغیرهای مؤثر بر خروجی‌ها با کمترین تعداد آزمایش است. متدولوژی سطح پاسخ روشی ریاضیاتی- آماری برای بهینه‌سازی خروجی‌های آزمایش‌ها است. این روش با کشف میزان بهینه هر یک از متغیرهای طراحی به بهترین سطح پاسخ دست می‌یابد.

در بسیاری از کاربردهای مهندسی، طراحی پایدار از مهم‌ترین مسائل موجود است. طراحی پایدار آن است که در مقابل فشارهای ممکن حداکثر پایایی را داشته باشد. استفاده از روش سطح پاسخ با در نظر گرفتن خروجی‌های مربوط به پایایی محصول، می‌تواند به این هدف دست یابد. از آنجا که بررسی روش‌های بهینه‌سازی سطح پاسخ به همراه در نظر گرفتن پایایی در ادبیات مهندسی کیفیت، کمتر مورد توجه قرار گرفته است، در این تحقیق بهینه‌سازی سطوح پاسخ چندگانه مرتبط به پایایی در نظر گرفته خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پایایی، مدل تنش- مقاومت، طراحی آزمایش‌ها، متدولوژی سطح پاسخ، رگرسیون

چندمتغیره

مقدمه

در ساخت و تولید، داشتن اطلاعات درباره پایایی مکانیکی یک طراحی از طریق مدل‌های مقاومت- تنش می‌تواند به طور قابل توجهی هزینه‌های تولید را کاهش داده و بازدهی را بالا ببرد. تصادفی بودن مقاومت یک قطعه به خوبی پذیرفته شده است و همین موضوع مبنایی برای مدل‌سازی آماری پایایی شده است.

در نظریه سنتی پایایی، اغلب، فقط درست یا نادرست کارکردن به عنوان وضعیت‌های عملکرد یک سیستم و اجزای آن فرض می‌شود. بنابراین در شرایطی که یک سیستم بتواند خارج از دو وضعیت ذکرشده و در حالتی بینابین به عمل ادامه دهد، نظریه دچار مشکل می‌شود. از این رو مفهوم سیستم‌های چندحالتی برای نمایش سطوح مختلف عملکرد به کار گرفته شد [۱].

همچنین در مورد سیستم‌های چند جزئی نیز مطالعات بسیاری انجام گرفته است که از مهم‌ترین آن می‌توان به این موارد اشاره کرد:

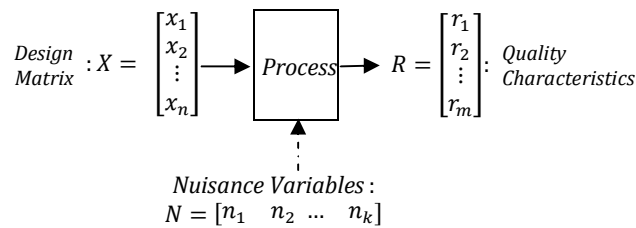
در سال ۱۹۷۴، سیستمی متشکل از n مؤلفه که با k مؤلفه سالم با تنش احتمالی X به درستی کار می‌کند، مورد مطالعه قرار گرفت که این حالت متناظر با سیستم‌های k تا n واحد است [۲].

سپس یک سیستم چندمتغیره مستقل که هر عضو آن نیز متشکل از چندین مؤلفه وابسته باشد، در سال ۲۰۰۸ مورد تحلیل پایایی قرار گرفت [۳].

بحث مدل‌های تنش- مقاومت نیز یکی دیگر از موضوعات جالب در ادبیات پایایی است. در ساده‌ترین مدل، یک سیستم یا قطعه تا زمانی کار می‌کند که مقاومت آن از تنش و فشاری که به آن وارد می‌شود، بیشتر باشد. این گونه مدل‌های به طور گسترده و با فرض‌های مختلف در توزیع‌های احتمالی مقاومت بررسی شده است [۴ و ۵]. همچنین بحث‌های جدیدتر درباره این مدل‌ها را می‌توان در کارهای [۶، ۷ و ۸] مشاهده کرد.

مدل چندمتغیره با فرض توزیع‌های مختلف برای متغیر تنش و مقاومت نیز به صورت $R=P(A^T X > B^T Y)$ توسعه داده شد [۹]. در این تحقیق توزیع چندمتغیره نرمال و گاما مورد تحلیل قرار گرفت.

با فرض توزیع گاما، وجود همبستگی بین مؤلفه‌ها در حالت چندمتغیره بررسی شده است [۱۰]. با فرض نرمال بودن توزیع احتمالات نیز در حالت تک‌متغیره، بررسی کامل و ارزیابی مدل مقاومت- تنش در سال ۱۹۹۲ انجام گرفته است [۱۱].



شکل ۱: نمایی از یک سیستم با چند ورودی و چند خروجی

مطالعه موردی پژوهش آن‌ها نشان داده شد که طراحی بر مبنای تئوری فازی بهتر جواب می‌دهد [۱۳].

در تحقیقی دیگر، از مفهوم رگرسیون فازی و کاربردهای آن در مدل‌سازی قالب‌ریزی انتقالی در کپسوله کردن ریزتراشه استفاده شده است. با یک مجموعه داده‌های آزمایشی ۳۰ تایی، رویکرد رگرسیونی خطی فازی برای توسعه مدل‌های فرآیندی با متغیرهای مستقل دمای قالب‌گیری، زمان پرکردن، نیروی انتقال، زمان برش و شکل تزریق مورد بررسی قرار گرفته شد. بر اساس این کار، رگرسیون خطی فازی می‌تواند با فازی‌سازی مدل رگرسیونی خطی آماری با یک تابع خطی فازی و پارامترهای فازی در مدل‌سازی فرآیند به کار رود [۱۴].

همچنین در مورد رویکرد احتمالی در طراحی، در سال ۲۰۰۱ با در نظر گرفتن توزیع نرمال چندمتغیره برای بردارهای چندپاسخی به بهینه‌سازی احتمالی این مدل پرداخته شد. در این تحقیق، همبستگی بین پاسخ‌ها نیز در نظر گرفته شد. نکته مهم در روش آن‌ها این بود که برای هر پاسخ یک فاصله اطمینان مطلوب تعریف شده و در نهایت مدل به نحوی بهینه‌سازی می‌شود که احتمال قرار گرفتن متغیرها در فواصل از پیش تعیین شده ماکزیمم شود [۱۵].

استفاده از طرح آزمایش و تخمین مدل خطی مربوط به شاخص‌های خروجی چندگانه سیستم، ضمن در نظر گرفتن متغیرهای کمکی احتمالی در حالت مستقل و همبسته در تحلیل و بهینه‌سازی سیستم‌های پیچیده به کار گرفته شده است [۱۶]. در مدل ارائه‌شده، استواری نتایج به همراه احتمال وقوع متغیر کمکی در یک برنامه‌ریزی آرمانی مدل‌سازی شد.

در تحقیقی دیگر [۱۷] از روابط فازی و غیرقطعی برای بهینه‌سازی فرایند تخلیه برقی ماشین‌ها استفاده شده است. در روش پیشنهادی آرایه‌های متعامد، تعاریف و

تعبیر پایایی را به طور اساسی با در نظر گرفتن عامل زمان بیان می‌کنند. هر چند برآورد پایایی از طریق مدل‌های مقاومت-تنش، به مفهوم بازده نزدیک‌تر است. همچنین در این مدل‌ها فرض می‌شود که میزان تنش و مقاومت اجزا یا سیستم، بر خلاف اکثر مدل‌های مبتنی بر زمان، ثابت نبوده و دارای توزیع احتمالی مشخص است.

طراحی سیستم‌ها بر مبنای شاخص‌های کیفیت و پایایی از موضوعات مهم در مطالعات مرتبط با سیستم‌های پیچیده است. حفظ مشخصه‌های کیفیت حدود تolerانسی و افزایش مقاومت آن‌ها در مقابل تنش‌های محیطی و کاربری بسیار در رقابت‌پذیری آن‌ها اثرگذار است.

در بحث طراحی آزمایش‌های آماری برای بهبود شاخص‌های خروجی سیستم‌ها نیز مطالعات زیادی انجام شده است. به تازگی رویکردهای غیرقطعی به این موضوع سبب شده است تا بتوان شاخص‌هایی نظیر پایایی که ماهیتی از جنس احتمال دارند را نیز به وسیله مدل‌های خطی یا خطی تعمیم‌یافته مورد تحلیل و بهینه‌سازی قرار داد.

نمونه‌ای از یک سیستم با متغیرهای آن در شکل (۱) نشان داده شده است.

مهم‌ترین مطالعات در زمینه بهینه‌سازی سیستم‌ها در شرایط غیرقطعی از طریق طرح آزمایش و مدل‌های خطی به استفاده از روش سطح پاسخ مربوط می‌شود.

در مورد رویکرد فازی به طراحی، کیم و لین یک رویکرد مدل‌سازی فازی برای بهینه‌سازی سیستمی با پاسخ‌های دوگانه پیشنهاد کرده‌اند. مدل پیشنهادی شرایط پارامتری، فرآیند را برای بیشینه‌سازی همزمان درجه رضایت میانگین و انحراف استاندارد پاسخ‌ها مشخص می‌کند [۱۲].

ونتر و هافتکا مفاهیم فازی را برای مدل‌سازی نبود قطعیت در صنعت هواپیمایی مورد استفاده قرار دادند. در

روش پیشنهادی

در این تحقیق سعی شده است که با استفاده از طرح آزمایش عاملی مبتنی بر سطح پاسخ، رابطه بین ورودی‌های طراحی و مشخصه‌های خروجی سیستم را تخمین بزند. پس از شناسایی عوامل مؤثر و تخمین سطح پاسخ $(Y(x))$ به بهینه‌سازی آن پرداخته می‌شود. با توجه به این مقدمات، گام‌های روش پیشنهادی به این شرح است:

- ۱- شناسایی متغیرهای خروجی سیستم (مقاومت^۱)، عوامل تأثیرگذار و طرح آزمایش مربوطه
- ۲- انجام آزمایش‌ها روی سیستم و جمع‌آوری اطلاعات
- ۳- به دست آوردن سطح پاسخ با استفاده از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته
- ۴- محاسبه توزیع آماری سطح پاسخ بر اساس روش تحلیل یا تقریبی
- ۵- تعیین میزان تنش^۲ و توزیع آن
- ۶- تشکیل مدل تنش-مقاومت
- ۷- تخمین $P(Y(x) < W)$ و ماکزیمم‌سازی آن
- ۸- تأیید نتایج محاسباتی

مدلسازی

در این بخش با توجه به ادبیات مدل‌های خطی و متدولوژی سطح پاسخ به بیان پارامترها، نمادها و متغیرهای مورد استفاده در این تحقیق پرداخته می‌شود [۲۱].

تعریف پارامترها و متغیرها

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ بردار متغیرهای قابل کنترل (عامل‌ها)
- $\hat{B} = [\hat{\beta}_1 : \hat{\beta}_2 : \dots : \hat{\beta}_r]$ برآوردگر حداقل مربعات ضرایب مدل خطی که از طریق $\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$ به دست می‌آید که در آن $\hat{\beta}_k = (X'X)^{-1}X'Y_k$ هر یک از ضرایب مدل را برای $k = 1, 2, \dots, r$ نشان می‌دهد. همچنین با این فرض که $E \sim N_{N \times r}(0, I_N \otimes \Sigma)$ ضرایب نیز دارای توزیع $\hat{B} \sim N_{N \times r}(B, (X'X)^{-1} \otimes \Sigma)$ خواهند بود که در آن $Cov(VEC \hat{B}') = (X'X)^{-1} \otimes \Sigma$

- $z(x) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2,$

روابط غیر قطعی، تصمیم‌گیری فازی و تحلیل واریانس به کار گرفته شده‌اند تا فرایند ویژگی‌های عملکردی یک فرایند ماشین‌کاری بهینه شود. آن‌ها با یک طرح L_9 یک آزمایش با ۳ فاکتور و ۳ پاسخ را تحلیل کردند. از طرف دیگر، کاربرد برنامه‌ریزی احتمالی در متدولوژی سطح پاسخ در سال ۲۰۰۵ بررسی و انواع مدل‌های ریاضی قابل کاربرد در این زمینه تشریح شد. در این مطالعه، چهار مدل معادل قطعی (مدل میانگین محور، مدل واریانس محور، مدل واریانس محور تعدیل شده و مدل احتمال محور) برای حل یک مدل برنامه‌ریزی احتمالی ارائه شد که در قلمروی روش‌های چند هدفه نیز قرار می‌گیرند [۱۸]. برای پیش‌بینی آماری حرکت روبات، روش سطح پاسخ احتمالی به کار گرفته شد [۱۹]. همچنین آن‌ها نتایج را با روش‌های شبیه‌سازی مقایسه کرده و بهبود روش خود را نشان دادند.

در سال ۲۰۱۱ از رگرسیون چندمتغیره و با بررسی توزیع نرمال ماتریسی برای سطوح پاسخ، به تخمین مدل خطی تعمیم‌یافته مرتبط با یک طرح آزمایش پرداخته و با وارد کردن توزیع احتمالی در مدل برنامه‌ریزی ریاضی، مدل‌های میانگین محور، واریانس محور تعدیل شده و ... بهینه‌سازی شد [۲۰].

هدف از این مطالعه، پیش‌بینی و بهبود پایایی مشخصه‌های خروجی در یک سیستم با استفاده از متدولوژی سطح پاسخ است. همان‌طور که در این بخش بحث شد، بررسی ماهیت تصادفی مشخصه‌های خروجی و همچنین خطای تصادفی در مدل‌های آماری مرتبط با آن‌ها از مسائلی است که بسیار محدود مد نظر قرار گرفته است. بنابراین در این تحقیق با استفاده از مدل پایایی تنش-مقاومت، به بهینه‌سازی مدل آماری برازانیده شده روی متغیرهای خروجی یک سیستم پرداخته خواهد شد. ساختار این تحقیق این‌گونه انجام شده است که پس از بررسی برخی از مطالعات مهم در زمینه تحلیل پایایی در مدل‌های مقاومت و تنش که پیش از این بیان شد، روش پیشنهادی در بخش ۲ تشریح خواهد شد و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای تأیید و نشان دادن کارایی و روش پیشنهادی در بخش ۳، از یک مدل شبیه‌سازی استفاده شده است.

که در آن تابع

- همان تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است.

- $\mu_Y(x)$ از رابطه (۱) به دست می‌آید.

- $(\Sigma_Y(x))$ از رابطه (۳) به دست می‌آید.

- μ_W و Σ_W نیز میانگین و ماتریس کوواریانس توزیع نرمال متغیر تنش است که جزو ورودی‌های مسئله است.

برای حل این برنامه ریاضی (۴) از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. برای مثال برای توزیع‌های ساده می‌توان با آزادسازی محدودیت‌های کران بالا و پایین از روش‌های بهینه‌سازی غیرمقید استفاده کرد.

ولی در صورت رسیدن به توزیع‌های پیچیده، ممکن است استفاده از روش‌های غیرکلاسیک بهینه‌سازی نظیر الگوریتم‌های فراابتکاری، مؤثرتر واقع شود. در این مطالعه، از آنجا که ادعایی بر محذب‌بودن برنامه‌ریزی ریاضی ارائه شده نمی‌توان کرد و بسته به توزیع مقاومت و تنش، ممکن است شرایط تحذب نقض شود، بنابراین از روش‌های مرسوم بهینه‌سازی غیرخطی محذب استفاده شده است. همچنین برای جلوگیری از افتادن در دام بهینه محلی، الگوریتم‌های موجود از نقاط شروع مختلفی به کار گرفته شده‌اند تا احتمال نیل به بهینه سراسری بالا رود. برای ارائه مقایسه و رسیدن به معیاری برای کیفیت جواب‌ها، ویرایش استاندارد از الگوریتم ژنتیک نیز برای کشف نقطه نزدیک به بهینه برای این مدل غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول ۱: طراحی عاملی کامل با ۵ تکرار برای آزمایش سیستم

Experiment ID	S	S
1	-1	-1
2	-1	0
3	-1	1
4	0	-1
5	0	0
6	0	1
7	1	-1
8	1	0
9	1	1

$$\hat{Y}_k(x) = z'(x)\beta_k = \beta_{0k} + \sum_{i=1}^n \beta_{ik} x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{iik} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \beta_{ijk} x_i x_j$$

نشان‌دهنده سطح پاسخ یا تابع پیش‌بینی‌کننده برای متغیر خروجی k ام در نقطه x .

$$\hat{Y}(x) = (\hat{Y}_1(x), \hat{Y}_2(x), \dots, \hat{Y}_r(x))' = \hat{B}'z(x)$$

سطوح چندپاسخی یا بردار پیش‌بینی متغیرهای خروجی در نقطه x .

• $\hat{\Sigma} = \frac{Y'(I_N - X(X'X)^{-1}X')Y}{N-p}$ برآوردگر ماتریس کواریانس به طوری که $(N-p)\hat{\Sigma}$ دارای توزیع ویشارت با پارامتر Σ و $(N-p)$ درجه آزادی است. بنابراین $\text{Im}((N-p)\hat{\Sigma}) \sim W_r(N-p, \Sigma)$ ماتریس همانی از رتبه m است.

و در پایان با توجه به موارد ذکرشده:

$$E(\hat{Y}(x)) = E(\hat{B}'z(x)) = B'z(x) \quad (۱)$$

$$\text{Cov}(\hat{Y}(x)) = z'(x)(X'X)^{-1}z(x)\hat{\Sigma} \quad (۲)$$

برآورد ناریبی از $\text{Cov}(\hat{Y}(x))$ با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{\text{Cov}}(\hat{Y}(x)) = z'(x)(X'X)^{-1}z(x)\hat{\Sigma} \quad (۳)$$

پس متغیر مقاومت دارای توزیع نرمال خواهد بود [۲۲ و ۲۳].

مدل ریاضی

پس از به دست آوردن توزیع احتمالی مدل تنش-مقاومت، و تخمین رابطه بین ورودی‌ها و تابع مقاومت به روش سطح پاسخ، می‌توان مدل ریاضی بهینه‌سازی پایایی را به شکل زیر ایجاد کرد:

$$\max P(W < E(\hat{Y}(x))) \quad (۴)$$

Subject to:

$$\text{Lower Bound} < x < \text{Upper Bound}$$

در برخی از حالات، توزیع متغیر تابع هدف در مدل ریاضی بالا شناخته شده و مشخص است [۳].

به عنوان نمونه با فرض توزیع نرمال چندمتغیره برای متغیرهای تنش و مقاومت می‌توان نوشت:

$$P(W < E(\hat{Y}(x))) = \phi\left(\frac{(\mu_Y(x) - \mu_W)}{(\Sigma_Y(x) + \Sigma_W)^{1/2}}\right) \quad (۵)$$

مثال عددی و اعتبارسنجی

پس از تشریح روش پیشنهادی در این بخش، از طریق یک مثال عددی، به بهینه سازی یک سیستم صنعتی با دو پارامتر طراحی و دو متغیر خروجی می پردازیم. یک سیستم موجودی (S,S) با شرایط احتمالی زیر مفروض است [۲۴]:

- شرکت مفروض قطعات قابل شمارشی را انبارش می کند (سفارش های عدد صحیح).
- سطح موجودی پس از گذشت t واحد زمان $I(t)$ و مقدار موجودی اولیه $I(0) = 60$.
- دوره بررسی سیستم ۱۲۰ روز است.
- زمان بین ورود مشتریان دارای توزیع نمایی با میانگین 0.1 روز است.
- تقاضای هر مشتری متغیری گسسته است که مقادیر ۱ تا ۴ قطعه را به ترتیب با احتمالات 0.167, 0.333, 0.167, 0.333 اخذ می کند.
- اگر هنگام ورود تقاضای مشتری، به میزان کافی موجودی در انبار باشد، تقاضا برآورده می شود.
- اگر به میزان تقاضا موجودی نباشد، همه موجودی به مشتری داده می شود و بقیه تقاضا به صورت پس افت باقی می ماند.
- مرور موجودی در ابتدای هر روز انجام می گیرد.
- دو متغیر مهم طراحی این سیستم موجودی عبارت است از کران پایین (S) و بالای موجودی (S).
- اگر هنگام مرور انبار، سطح فعلی موجودی از S بیشتر باشد، سیستم به کار خود در آن روز ادامه می دهد.
- ولی اگر سطح موجودی از S کمتر باشد، به میزان اختلاف سطح موجودی تا S سفارش قطعه داده می شود.
- قابل ذکر است که سفارشات برای تکمیل انبار دارای زمان تدارکی است که از توزیع یکنواخت بین ۰.۵ تا ۱ روز پیروی می کند.

پس از تشریح سیستم مورد مطالعه باید بر اساس رویکرد پیشنهادی به تحلیل مسئله پرداخت:

۱- شناسایی متغیرهای خروجی سیستم (مقاومت)، عوامل تأثیرگذار و طرح آزمایش مربوطه

در این مثال مطلوب است مقادیر بهینه متغیرهای S (ماکزیم سطح موجودی) و S (سطح پایین موجودی) را به نحوی تعیین شود که دو هدف زیر همزمان برآورده شود:

۱. هزینه سیستم موجودی (نگهداری و سفارش دهی و کمبود).

ب. درصد مشتریانی که با کمبود مواجه شده اند و تقاضای آنها بی پاسخ مانده است.

۲- انجام آزمایش ها روی سیستم و جمع آوری اطلاعات

بدین منظور از یک طرح 3^2 با ۵ تکرار استفاده شده است. خلاصه جدول طرح آزمایش، آورده شده است.

قابل ذکر است که سطوح متغیرهای کنترلی سیستم که به صورت گذشته برابر -۱.۰ و ۱ تنظیم شده اند، برای حداقل سطح موجودی معادل مقادیر ۲۵ و ۱۵ و برای متغیر حداکثر موجودی معادل مقادیر ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ است. با توجه به طرح تولید شده، آزمایشاتی روی سیستم انجام گرفته که نتایج متغیرهای خروجی در ادامه آورده شده است.

جدول ۲: هزینه سیستم موجودی با توجه به آزمایشات طراحی شده

Total cost	Replicates				
	1	2	3	4	5
Experiment ID					
1	154.30	151.11	155.81	153.01	155.62
2	142.20	147.95	142.31	148.79	146.99
3	144.52	141.68	138.08	143.32	137.53
4	137.06	134.09	128.56	136.24	144.76
5	124.27	121.19	128.63	129.10	135.27
6	123.63	125.03	119.84	122.50	124.25
7	133.24	125.35	132.76	134.15	134.15
8	126.76	122.57	119.10	121.00	125.85
9	116.00	114.66	124.32	120.59	124.52

جدول ۳: درصد مشتریان مواجه شده با کمبود با توجه به آزمایشات طراحی شده

Shortage percent	Replicate				
	1	2	3	4	5
Experiment ID					
1	0.416	0.419	0.419	0.419	0.417
2	0.368	0.384	0.377	0.390	0.385
3	0.375	0.370	0.364	0.377	0.356
4	0.344	0.347	0.339	0.354	0.355
5	0.292	0.291	0.309	0.308	0.311
6	0.207	0.218	0.212	0.209	0.231
7	0.287	0.287	0.298	0.299	0.291
8	0.247	0.253	0.238	0.241	0.250
9	0.158	0.155	0.184	0.203	0.197

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 14.8820 & 0.0219 \\ 0.0219 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

۴- محاسبه توزیع آماری سطح پاسخ بر اساس روش تحلیل یا تقریبی

توزیع دقیق سطوح پاسخ به ازای یک بردار مشاهده جدید \hat{x} ، نرمال دو متغیره با پارامترهای زیر است:

$$\hat{Y}(\hat{x}) \sim N_2(z(\hat{x})^T \hat{B}, z(\hat{x})^T (X^T X)^{-1} z(\hat{x}) \Sigma)$$

۵- تعیین میزان تنش و توزیع آن در این سیستم موجودی، فرض شده است که میزان بودجه سالانه و سطح رضایت مشتری (درصد کمبود قابل قبول) دارای توزیع نرمال دو متغیره با پارامترهای زیر هستند:

$$W \sim N_2(\mu = \begin{bmatrix} 130 \\ 25\% \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 12 & -0.2 \\ -0.2 & 0.05 \end{bmatrix})$$

۶- تشکیل مدل مقاومت-تنش

$$RF(\hat{x}) = P(\hat{Y}(\hat{x}) < W)$$

۷- تخمین $P(Y(x) < W)$ و ماکزیموم سازی آن

$$RF(\hat{x}) = \phi \left(\frac{(\mu_W - z(\hat{x})^T \hat{B})}{(\Sigma_W + z(\hat{x})^T (X^T X)^{-1} z(\hat{x}) \Sigma)^{1/2}} \right)$$

در واقع در اینجا هدف طراحی سیستم به نحوی است که رضایت مشتری و بودجه سالانه با بیشترین احتمال توسط سیستم برآورده شود.

با تشکیل مدل ریاضی و حل توسط الگوریتم ژنتیک (ابزار نرم افزار MATLAB) نتایج زیر حاصل شده است:

$$x = \begin{pmatrix} s, S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85, 1 \end{pmatrix}$$

coded

با توجه به رابطه کدشدن عامل‌ها می‌توان مقادیر اصلی آن‌ها را به دست آورد.

$$s = 0.85 \left(\frac{25-5}{2} \right) + \left(\frac{25-5}{2} \right) = 18.5$$

$$S = 1 \left(\frac{60-30}{2} \right) + \left(\frac{60-30}{2} \right) = 60$$

میزان قابلیت اطمینان از بودجه و سطح رضایت مشتری پس از حل مدل پیشنهادی به ۸۴.۸۱٪ رسیده که مقداری قابل قبول است. همچنین مقادیر هزینه سیستم و درصد مشتریان کمبودی نیز در نقطه بهینه برابر است با:

$$E(\hat{Y}(\hat{x})) = (118.5988, 18.07)$$

شکل ۱ نیز نشان‌دهنده همگرایی الگوریتم ژنتیک در کشف جواب نهایی است.

مدل ذکرشده با برخی دیگر از روش‌های مرسوم بهینه‌سازی غیرخطی نیز حل شده که خلاصه‌ای از مقایسه بین نتایج در جدول (۴) ارائه شده است.

۳- به دست آوردن سطح پاسخ با استفاده از Generalized Linear Models ابتدا با استفاده از نرم‌افزار SAS مدل درجه دو با جملات تعاملی را به صورت زیر برازش می‌دهیم (جدول ۴ و ۵).

جدول ۴: به دست آوردن سطح پاسخ برای خروجی اول

Response 1 (Y1)					
Variable	DF	Parameter estimate	Standard error	t	Pr > t
Intercept	1	127.47867	1.24701	102.23	<.0001
x ₁	1	-10.94	0.68302	-16.02	<.0001
x ₂	1	-6.32467	0.68302	-9.26	<.0001
x ₁ ²	1	6.98	1.18302	5.9	<.0001
x ₂ ²	1	2.224	1.18302	1.88	0.0676
x ₁ x ₂	1	0.258	0.83652	0.31	0.7594

جدول ۵: به دست آوردن سطح پاسخ برای خروجی دوم

Response 2 (Y2)					
Variable	DF	Parameter estimate	Standard error	t	Pr > t
Intercept	1	0.29249	0.00534	54.78	<.0001
x ₁	1	-0.07493	0.00292	-25.62	<.0001
x ₂	1	-0.04917	0.00292	-16.81	<.0001
x ₁ ²	1	0.02567	0.00507	5.07	<.0001
x ₂ ²	1	-0.00603	0.00507	-1.19	0.2408
x ₁ x ₂	1	-0.01585	0.00358	-4.42	<.0001

با انجام آزمایش چند متغیره روی جملات پیش‌بینی‌کننده، مشاهده شده است که جمله x_2^2 از نظر آماری معنی‌دار نیست. با حذف این جمله از پیش‌بینی‌کننده‌ها و با توجه به روابط بیان‌شده در بخش مدل‌سازی خواهیم داشت:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 128.9613 & 0.2885 \\ -10.9400 & -0.0749 \\ -6.3247 & -0.0492 \\ 6.9800 & 0.0257 \\ 0.2580 & -0.0159 \end{bmatrix}$$

که ستون اول ضرایب رگرسیون (سطح پاسخ) برای متغیر اول و ستون دوم مربوط به متغیر خروجی دوم است.

بر اساس داده‌های ورودی ماتریس کواریانس خروجی‌ها به صورت زیر است:

در جدول مقایسه‌ای بین این دو روش عمده و روش پیشنهادی ارائه شده است.

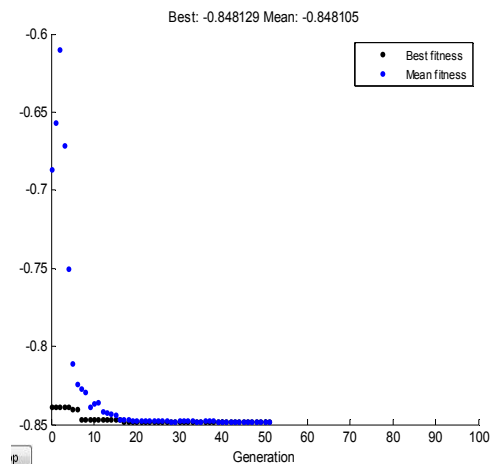
جدول ۷: مقایسه نتایج به دست آمده از طریق روش‌های موجود با رویکرد پیشنهادی

Method	Design Variables (s,S)	Final Reliability
MRSM [25]	(0,0.2)	0.37
OptQuest	(0.9,1)	0.847
Proposed Method	(0.8473,1)	0.8481

قابل توجه است که روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های فراابتکاری، با اینکه جوابی نزدیک به جواب روش پیشنهادی نتیجه دادند، ولی به دلیل ارائه نکردن مدل ریاضی بین ورودی و خروجی‌ها و نیز زمان پردازش بالا، کارایی کمتری نسبت به مدل‌سازی آماری دارند. همچنین در صورت بالا رفتن تعداد متغیرهای کنترلی، این گونه روش‌ها امکان غربالگری متغیرها و ساده‌سازی مدل را نخواهند داشت. بنابراین بر پیچیدگی زمانی آن‌ها افزوده خواهد شد.

بحث و نتیجه‌گیری

امروزه در سیستم‌های پیچیده، طراحی متغیرهای کنترلی (عامل‌ها) به منظور بهینه‌سازی مشخصه‌های عملکردی مورد توجه بسیار قرار گرفته است. برخی از سیستم‌ها تحت تنش‌هایی (فشارهایی) هستند که از خارج سیستم بر آن‌ها وارد شده و باید در مقابل آن‌ها مقاومت داشته‌باشند. طراحی سیستم، به نحوی که بیشترین پایایی در مقابل این فشارها را نشان دهد، از مهم‌ترین وظایف مهندسان سیستم است. در این تحقیق، با ترکیب مدل پایایی مقاومت-تنش در حالت چندمتغیره و متدولوژی سطح پاسخ، رویکردی برای بهینه‌سازی سیستم‌های پیچیده ارائه شد که در آن، هم متغیرهای مقاومت و هم متغیر تنش دارای توزیع احتمالی باشند. همچنین برای نشان دادن کارایی روش ارائه‌شده، مثالی با در نظر گرفتن توزیع نرمال چندمتغیره ارائه شد و ملاحظه شد که روش پیشنهادی، توانایی افزایش پایایی را تا سطح مطلوبی دارد.



شکل ۱: نمودار همگرایی جواب در الگوریتم ژنتیک بکارگرفته شده در مثال عددی

جدول ۱: مقایسه نتایج حاصل از حل مدل با برخی از روش‌های مرسوم برنامه‌ریزی غیرخطی

Algorithm (Solver)	Design Variables (s,S)	Final Reliability	Starting Points
Interior point (fmincon)	(0.8473,1)	0.8481	(-1,-1), (1,1), (0,0)
SQP ³ (fmincon)	(-1,-1)	2.8597e-12	(-1,-1)
	(0.8473,1)	0.8481	(0,0)
Active set (fmincon)	(-1,-1)	2.8597e-12	(-1,-1)
	(0.8473,1)	0.8481	(0,0)

همان‌طور که در جدول بالا نشان داده شده است، به جز روش نقطه درونی، سایر روش‌های بررسی شده، نسبت به نقاط شروع مذکور پایداری نداشته، که نشان از وجود نقاط بحرانی محلی در این مسئله است. البته با توجه به این نقاط اولیه، می‌توان اشاره کرد که روش نقطه درونی توانسته در تعداد تکرار اندکی (کمتر از ۱۵) به جواب دست یابد.

برای انجام مقایسه نتایج روش پیشنهادی با سایر رویکردهای موجود، دو روش مهم در بهینه‌سازی سیستم‌های شبیه‌سازی شده انتخاب شده است. رویکرد اول استفاده از روش سطح پاسخ کلاسیک است که به طور تک‌متغیره ارتباط بین ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم را مدل‌سازی می‌کند و از این طریق به بهینه‌سازی خروجی‌ها می‌پردازد. الگوریتم‌های فراابتکاری نیز دسته دیگری از روش‌های بهینه‌سازی شبیه‌سازی را تشکیل می‌دهند که ترکیبی از قدرتمندترین این روش‌ها در الگوریتم ترکیبی OptQuest گنجانده شده است [۲۵].

مراجع

- 1- Eryilmaz, S. (2011). "A new perspective to stress–strength models." *Ann Inst Stat Math* 63:101–115, DOI 10.1007/s10463-008-0211-3.
- 2- Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A. (1974). "Estimation of reliability in a multicomponent stress– strength model." *J Am Stat Assoc*, 69, 966–70.
- 3- Eryilmaz, S. (2008). "Multivariate stress–strength reliability model and its evaluation for coherent structures." *J Multivariate Anal*, 99, 1878–1887.
- 4- Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003). "*The stress-strength model and its generalizations*." Singapore: World Scientific.
- 5- Johnson, R. A. (1988). "*Stress–strength models for reliability*." In P. R. Krishnaiah, C. R. Rao (Eds.) In *handbook of statistics* (pp. 27–54). Vol. 7, North-Holland: Elsevier.
- 6- Mokhlis, N. A. (2005). "Reliability of a stress–strength model with Burr type III distributions." *Comm Stat Theor Meth*, 34, 1643–1657.
- 7- Krishnamoorthy, K., Mukherjee, S. and Guo, H. Z. (2007). "Inference on reliability in two-parameter exponential stress–strength model." *Metrika*, 65, 261–273.
- 8- An, Z. W., Huang, H. Z. and Liu, Y. (2008). "A discrete stress–strength interference model based on universal generating function." *Reliab Eng Syst Saf*, 93, 1485–1490.
- 9- Turkkan, N. and Gia, T. P. (2007). "System stress–strength reliability: The multivariate case." *IEEE Trans Reliab*, 56, 115–124.
- 10- Mathai, A. M. and Moschopoulos, P. G. (1991). "On a multivariate gamma." *J Multivariate Anal*, Vol. 39, PP. 135–153.
- 11- Weerahandi, S. and Johnson, R. A. (1992) "Testing Reliability in a Stress-Strength Model When X and Y Are Normally Distributed." *Technometrics*, 34, No. 1, PP. 83-91.
- 12- Kim, K-J., Lin, DK. J. (1998). "Dual Response Optimization: A Fuzzy Modeling Approach." *J Qual Tech*, Vol. 30, PP. 1-10.
- 13- Venter, G. R. and Haftka, T. (1999). "Using Response Surface Approximations in Fuzzy Set Based Design Optimization." *Struct Optim*, 18 (4): 218-227.
- 14- Ip, K.W., Kwong, C.K. and Wong, Y.W. (2003). "Fuzzy regression approach to modeling transfer molding for microchip encapsulation." *J. Mater. Process. Technol.*, 140 (1–3) 147–151. 22.
- 15- Chiao, C. and Hamada, M. (2001). "Analyzing experiments with correlated multiple responses." *J Qual Tech*. 33: 451–465.
- 16- Hejazi, T. H., Bashiri, M. Noghondarian, K. and Atkinson, A. C. (2011). "Multiresponse Optimization with Consideration of Probabilistic Covariates." *Qual Reliab Eng Int*. 27, 437–449.
- 17- Lin, J.L. and Lin, C.L. (2005). "The use of grey-fuzzy logic for the optimization of the manufacturing process." *J. Materials Process. Technol*. 160, 9–14.
- 18- Díaz-García, J.A. Ramos-Quiroga, R. Cabrera-Vicencio, E. (2005). "Stochastic programming methods in the response surface methodology." *Comput. Statist. Data Anal.*, 49, 837–848, doi: 10.1016/j.csda.2004.06.007.
- 19- Kewlani, G. and Iagnemma, K. (2008). "A stochastic response surface approach to statistical prediction of mobile robot mobility." *Proc of Int Conf on Intell Rob and Syst. IROS. IEEE/RSJ* (DOI:

-
- 10.1109/IROS.2008.4651187), PP: 2234-2239.
- 20- Hejazi, T.H., Bashiri, M., Díaz-García, J.A. and Noghondarian, K. (2011). "Optimization of probabilistic multiple response surfaces." *Appl. Math. Modell.* doi:10.1016/j.apm.2011.07.067.
- 21- Muirhead, R. J., (1982). "*Aspects of multivariate statistical theory.*" Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc.
- 22- Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981). "Simultaneous optimization of multiple responses represented by polynomial regression functions." *Technometrics* 23, 363-375.
- 23- Khuri, A. I. and Cornell, J. A. (1987). "*Response Surfaces: Designs and Analyses.*" Marcel Dekker, Inc., NewYork.
- 24- Kelton, W. D., Sadowski, R. P. and Sturrock, D. T. (2004). "*Simulation with Arena- Third Edition.*" McGraw-hill.
- 25- Bashiri, M, Hejazi, T.H. and Badri, H. (2009) "Multiple Simulation Response Surfaces for Robust Optimization in Inventory Model." *Proc of 6th Int Ind Eng Conf, Tehran*, Article No: A- 11-459-2.A.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Strength
 - 2- Stress
 - 3- Sequential Quadratic Programming
-