

## توسعه مدل کنترل موجودی قطعی برای کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن کمبود پس‌افت و تخفیف مقداری

محمد مهدوی مزده<sup>۱\*</sup>، ارشیا ریاحی نظری<sup>۲</sup> و عطاالله طالعی‌زاده<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد مهندسی صنایع - دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۳</sup> استادیار دانشکده مهندسی صنایع - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۹۱/۱۱/۷، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۱/۱۱/۲۴، تاریخ تصویب ۹۲/۱/۲۴)

### چکیده

در اکثر مدل‌های کنترل موجودی فرض می‌شود که اقلام در زمان نامحدود می‌توانند برای برآورده کردن تقاضای آینده ذخیره شوند و کیفیت و کمیت آن‌ها در طول زمان تغییر نمی‌کند. با این وجود انواع خاصی از محصولات وجود دارند که در طول زمان رو به زوال رفته و یا غیر قابل استفاده می‌شوند (مانند مواد غذایی، الکل، دارو و...). در نتیجه چنانچه نرخ زوال مقدار قابل توجهی باشد، اثر آن را نمی‌توان نادیده گرفت. از طرفی دیگر در دنیای واقعی در بسیاری از مواقع قیمت تمام شده یک محصول مستقل از تعداد محصول خریداری شده نیست. بدین معنا که با بالا رفتن تعداد سفارش قیمت کمتری برای هر واحد کالا پرداخت می‌شود. در نظر گرفتن این تخفیفات مقداری در مدل‌ها باعث کارآمدتر شدن مدل و بالا رفتن قابلیت استفاده از مدل در دنیای واقعی می‌شود. در این مقاله به بررسی مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن تخفیف مقداری از سوی فروشنده و همچنین مجاز بودن کمبود، زمانی که نرخ تقاضا به صورت ثابت سالیانه می‌باشد، می‌پردازیم. در این مدل سیستم موجودی تک کالایی، نرخ فساد ثابت، کمبود به صورت پس‌افت کامل و مدت زمان تحویل کالا نیز برابر صفر است. پس از مدل‌سازی مسئله و بدست آوردن تابع هدف مدل ابتدا روش حل دقیق و الگوریتم ساده و کارآمدی جهت یافتن مقادیر بهینه ارائه می‌شود، سپس برای تشریح مدل و الگوریتم به ارائه مثال عددی و آنالیز حساسیت مدل می‌پردازیم.

**واژه‌های کلیدی:** مدل مقدار سفارش اقتصادی، کالای فسادپذیر، تخفیف مقداری، تخفیف کلی، کمبود

### مقدمه

فروش از دست رفته، تک محصولی یا چند محصولی بودن و پرداخت‌های معوقه پرداخته شده است. از دیگر مقالاتی که در آن، به در نظر گرفتن فرضیه فسادپذیری محصولات پرداخته شده است، می‌توان به کارهای جولای و همکاران [۵] در سال ۱۳۸۴، میرزازاده و همکاران [۶] و همچنین جولای و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۱ اشاره کرد. تخفیف در قیمت به شکل‌های مختلفی می‌تواند ارائه شود که از مهم‌ترین و کارآمدترین آن‌ها می‌توان به تخفیف مقداری اشاره کرد. کروتر<sup>۸</sup> [۸] در سال ۱۹۶۴ میلادی به انتشار رابطه میان قیمت و اندازه سفارش‌های گوناگون با هدف داشتن اقتصادی روان و مؤثر برای فروشنده پرداخت. از جمله مدل‌های تعیین میزان سفارش اقتصادی<sup>۹</sup> اولیه که در آنها تخفیف در قیمت نیز در نظر گرفته شده است، می‌توان به مقالات لو<sup>۹</sup> و کیو<sup>۹</sup> [۹]، باستین<sup>۱۰</sup> [۱۰]، چاو<sup>۱۱</sup> [۱۱]، مارتین<sup>۱۲</sup> [۱۲] و ... اشاره

در مدل‌سازی ریاضی، مسائل کنترل موجودی که با مسئله کلاسیک میزان سفارش اقتصادی هریس<sup>۱</sup> [۱] شروع شد، این فرض در نظر گرفته می‌شد که محصولات عمر نامتناهی دارند. در نظر گرفتن فسادپذیری کالا برای اولین بار توسط ویتین<sup>۲</sup> [۲] به صورت از مدافتادگی کالا پس از مدت زمان مشخص، مطرح شد. حدود یک دهه قبل گوپال<sup>۳</sup> و گیری<sup>۴</sup> [۳] به دسته‌بندی مدل‌های کنترل موجودی بر مبنای فسادپذیری پرداختند. ایشان با بررسی ۱۳۰ منبع، مدل‌های کنترل موجودی را بر اساس وجود یا نبود از مدافتادگی و فسادپذیری تقسیم‌بندی کردند. از جمله مقالات جامعی که در زمینه فسادپذیری محصولات انجام شده است، می‌توان به کار باکر<sup>۵</sup> و همکاران [۴] اشاره کرد. در این مقاله به مرور ادبیات مقالات مرتبط با مبحث فسادپذیری از سال ۲۰۰۱ تا کنون با در نظر گرفتن فرضیاتی مانند تخفیف در قیمت، کمبود پس‌افت و

مدلی با در نظر گرفتن این سه مشخصه به طور همزمان و ارائه راه حل دقیق ارائه نشده است. ابتدا در قسمت ۲ به تعریف مسئله پرداخته و سپس در قسمت ۳ به معرفی پارامترها و متغیرهای تصمیم و همچنین فرضیات مسئله می‌پردازیم. در ادامه با معرفی همه هزینه‌های مسئله به مدل‌سازی و به دست آوردن تابع هدف مدل که برابر با مجموع هزینه‌های کنترل موجودی است، می‌پردازیم و پس از اثبات تحدب تابع هدف مدل، روش حل دقیق و الگوریتم کارآمدی برای به دست آوردن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله ارائه شده است. در بخش ۴، مثال عددی و تحلیل حساسیت برای مسئله ارائه شده است و در نهایت در بخش ۵ به جمع‌بندی موضوع و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

### تعریف مسئله

در این قسمت، مدل کنترل موجودی سفارش اقتصادی ساده برای حالتی که محصولات با گذشت زمان با نرخ ثابت فاسد می‌شوند، توسعه داده شده است. در این مسئله کمبود مجاز بوده و به صورت کامل پس‌افت می‌شود. همچنین نوعی از تخفیف مقداری از سوی فروشنده پیشنهاد می‌شود، به این صورت که با توجه به میزان سفارش، قیمت‌های خرید متفاوتی برای خریدار در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در این مدل، تقاضا برای محصول، مشخص و مقداری ثابت در نظر گرفته شده است. سایر مفروضات مسئله در ادامه بیان شده است.

۱. همه پارامترهای مدل قطعی هستند.
۲. سیستم موجودی، تک‌کالایی و بدون محدودیت است.
۳. مدت زمان تحویل برابر با صفر است.
۴. افق زمانی، نامحدود در نظر گرفته می‌شود.
۵. تقاضا در طول زمان ثابت بوده و مقدار آن برابر با  $D$  است.
۶. کمبود مجاز بوده و به صورت کامل پس‌افت می‌شود (همه تقاضای با کمبود مواجه شده، قابل جبران است).
۷. کالای موجود در انبار در طول زمان با نرخ ثابت فاسد می‌شود و نرخ فساد برابر با کسری ثابت از موجودی در دست در هر لحظه از زمان است.

کرد. از جمله مقالات جامعی که در زمینه تخفیف در قیمت محصولات انجام شده است، می‌توان به کار شاه<sup>۱۳</sup> و دیکسیت<sup>۱۴</sup> [۱۳] در سال ۲۰۰۵ اشاره کرد. در این مقاله به مرور ادبیات مقالات مرتبط با مبحث تخفیف در قیمت شامل تخفیف کلی، افزایشی، فرصت استثنایی خرید و... پرداخته شده است.

علاوه بر فسادپذیری و تخفیف در قیمت، از دیگر فرضیاتی که در مدل‌های کنترل موجودی پر اهمیت است، می‌توان به مجاز و یا غیر مجاز بودن کمبود اشاره کرد. از جمله مقالات اولیه که به در نظر گرفتن کمبود مجاز در مسائل کنترل موجودی پرداخت، می‌توان به مقاله زیپکین<sup>۱۵</sup> [۱۴] در سال ۲۰۰۰ اشاره کرد. این فرض در مقالات بسیاری به کار گرفته شده است. پنتیکو<sup>۱۶</sup> و دریک<sup>۱۷</sup> [۱۵] در سال ۲۰۱۱ به مرور ادبیات مقالات مرتبط با مبحث کمبود در ۴۰ سال گذشته با در نظر گرفتن فرضیاتی مانند قیمت‌گذاری، فسادپذیری، تقاضای وابسته به زمان و سطح موجودی و تخفیف مقداری پرداخته‌اند.

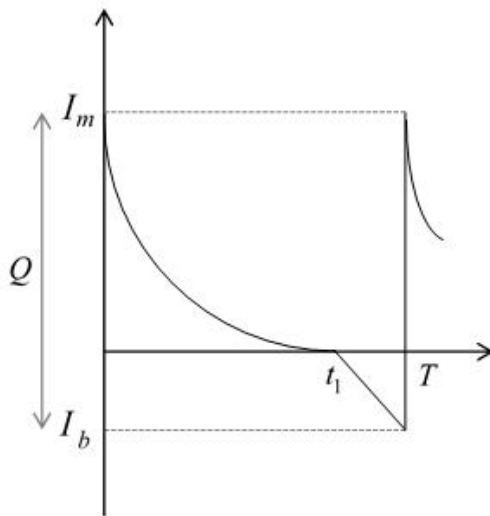
مقالاتی که تا کنون به بررسی سه فرض اساسی فسادپذیری، تخفیف در قیمت و کمبود به طور همزمان پرداخته‌اند، بسیار محدود بوده و از آن جمله می‌توان به کارهای چان<sup>۱۸</sup> و لین<sup>۱۹</sup> [۱۶] در سال ۲۰۰۱، مون<sup>۲۰</sup> و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۰۵، هو<sup>۲۱</sup> [۱۸] در سال ۲۰۰۶ و دای<sup>۲۲</sup> و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۷ اشاره کرد. لازم به ذکر است که در همه این مقالات، تخفیف به کار گرفته شده به صورت درصدی ثابت در سال‌های مختلف و در حقیقت تخفیف در قیمت بر اساس زمان‌های گوناگون و با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول بوده است و در هیچ یک از این مقالات، به در نظر گرفتن تخفیف مقداری برای خریدار و ارائه قیمت‌های خرید مختلف بر اساس حجم سفارش صادر شده، پرداخته نشده است.

در این کار تحقیقاتی، مدل کنترل موجودی، تعیین میزان سفارش اقتصادی با در نظر گرفتن فسادپذیری برای محصولات و ارائه تخفیف مقداری از سوی فروشنده و همچنین مجاز بودن کمبود برای تقاضای ثابت توسعه داده شده است. با توجه به مطالعات انجام گرفته، سه مشخصه فسادپذیر بودن، تخفیف مقداری در قیمت و کمبود از مشخصه‌های قابل توجه در مبحث کنترل تولید و موجودی‌ها هستند که با مرور مطالعات قبلی تا کنون،

۸. با توجه به حجم سفارشات، از سوی فروشنده، تخفیف در قیمت ارائه می‌شود که به صورت تخفیف مقداری و از نوع کلی است.

### مدل‌سازی تابع هدف

همان‌طور که در قسمت قبل نیز بیان شد،  $I(t)$  نشان‌دهنده سطح موجودی در دست در زمان  $t$  است. بدیهی است که تغییرات موجودی تحت تأثیر دو عامل اساسی تقاضا و فساد است. از آنجایی که فساد فقط زمانی رخ می‌دهد که میزان موجودی در دست مثبت باشد، در بازه زمانی  $[0, t_1]$  کاهش موجودی ناشی از هر دو عامل تقاضا و فساد و در بازه زمانی  $[t_1, T]$  کاهش موجودی فقط ناشی از تقاضای کالا خواهد بود. این مسئله در نمودار کنترل موجودی شکل (۱) نیز به وضوح قابل رویت است.



شکل ۱: نمودار کنترل موجودی برای کالای فسادپذیر، کمبود پس‌افت و تخفیف برای تقاضای ثابت

برای محاسبه هزینه‌های کنترل تولید و موجودی، ابتدا به محاسبه تابع موجودی در دست بر حسب زمان می‌پردازیم:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = -\theta I(t) - D & 0 < t < t_1 \\ \frac{dI(t)}{dt} = -D & t_1 < t < T \end{cases} \quad (1)$$

اثبات می‌شود که حل معادله دیفرانسیل خطی

$$y' = -p(x)y + q(x) \quad (2)$$

که در آن  $y$  تابعی از  $x$  است و  $y'$  برابر است با  $\frac{dy}{dx}$  و همچنین  $p(x)$  و  $q(x)$  نیز توابعی دلخواه از  $x$

### مدل‌سازی

#### نمادها و متغیرهای تصمیم

نمادهای استفاده‌شده در مدل‌سازی مسئله به شرح زیر هستند:

$A$ : هزینه هر بار سفارش کالا

$D$ : نرخ تقاضای کالا در واحد زمان

$c$ : هزینه خرید هر واحد کالا

$I(t)$ : سطح موجودی انبار در زمان  $t$

$i$ : نرخ بهره دریافتی برای هر واحد پولی در واحد زمان (که در این صورت هزینه نگهداری هر واحد محصول در واحد زمان به صورت  $iC$  خواهد بود)

$\theta$ : ضریب فساد موجودی در دست در واحد زمان ( $0 < \theta < 1$ )

$\pi$ : هزینه کمبود برای هر واحد کالا در واحد زمان

$c_d$ : هزینه فساد هر واحد کالا

$T$ : طول هر دوره سفارش‌دهی (متغیر تصمیم)

$t_1$ : زمانی که موجودی کالا در انبار به صفر می‌رسد (متغیر تصمیم)

$Q$ : میزان سفارش در هر بار سفارش‌دهی (متغیر تصمیم)

$j$ : اندیس شماره‌دهنده دسته‌های تخفیف در قیمت ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ )

$Q_{wd}$ : میزان سفارش در هر بار سفارش‌دهی بدون در نظر گرفتن تخفیف

$q_j$ : نقاط شکست تخفیف ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ )

$I_b$ : بیشترین مقدار مواجهه با کمبود در هر دوره

$I_m$ : بیشترین مقدار سطح موجودی در هر دوره

$TC_o$ : مجموع هزینه سفارش‌دهی در واحد زمان

$TC_h$ : مجموع هزینه نگهداری در واحد زمان

$TC_s$ : مجموع هزینه کمبود در واحد زمان

$TC_p$ : مجموع هزینه خرید در واحد زمان

$TC_d$ : مجموع هزینه فساد در واحد زمان

$TC$ : مجموع هزینه‌های کنترل موجودی‌ها در واحد زمان

$$\bar{I} = \int_0^{t_1} I(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{D}{\theta} [e^{\theta(t_1-t)} - 1] dt = \frac{D}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - \theta t_1 - 1) \quad (10)$$

با توجه به مقدار متوسط موجودی ( $\bar{I}$ ) محاسبه شده، هزینه نگهداری کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_h = \frac{ic\bar{I}}{T} = \frac{icD}{T\theta^2} (e^{\theta t_1} - \theta t_1 - 1) \quad (11)$$

با توجه به کوچک بودن مقدار  $\theta$  می‌توان از بسط تیلور به صورت  $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$  استفاده کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$TC_h = \frac{icD}{T\theta^2} \left( 1 + \theta t_1 + \frac{1}{2}\theta^2 t_1^2 - \theta t_1 - 1 \right) = \frac{icDt_1^2}{2T} \quad (12)$$

### هزینه مواجهه با کمبود

برای محاسبه هزینه کمبود، ابتدا نیاز است میزان متوسط کمبود در سیکل ( $\bar{B}$ ) محاسبه شود. از آنجایی که در بازه زمانی  $(0, t_1)$  سطح موجودی در دست در سیستم، مثبت است، در این بازه با کمبود مواجه نمی‌شویم و فقط در بازه زمانی  $(t_1, T)$  تقاضا با کمبود مواجه می‌شود. بنابراین برای محاسبه متوسط کمبود در دوره، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\bar{B} = -\int_{t_1}^T I(t) dt = -\int_{t_1}^T -D(t - t_1) dt = \frac{D(T - t_1)^2}{2} \quad (13)$$

با توجه به مقدار متوسط کمبود در دوره ( $\bar{B}$ ) محاسبه شده، هزینه کمبود کل در واحد زمان به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$TC_s = \frac{\bar{B}\pi}{T} = \frac{\pi D(T - t_1)^2}{2T} \quad (14)$$

### هزینه خرید کالا

با توجه به میزان سفارش در دوره ( $Q$ ) محاسبه شده در رابطه (۸)، مقدار کل هزینه خرید در واحد زمان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_p = \frac{Qc}{T} = \frac{cD}{T} \left[ \frac{1}{\theta} (e^{\theta t_1} - 1) + (T - t_1) \right] \quad (15)$$

با توجه به کوچک بودن مقدار  $\theta$ ، می‌توان از بسط تیلور به صورت  $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$  استفاده کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$TC_p = \frac{cD}{T} \left[ \frac{1}{\theta} \left( 1 + \theta t_1 + \frac{1}{2}\theta^2 t_1^2 - 1 \right) + (T - t_1) \right] = \frac{cD}{T} \left( \frac{\theta t_1^2}{2} + T \right) \quad (16)$$

هستند. با توجه به روابط ذکرشده برای به دست آوردن  $I(t)$  خواهیم داشت:

$$I(t) = \begin{cases} e^{-\int \theta dt} \times \left[ \int -D \cdot e^{\int \theta dt} dt \right] & 0 < t < t_1 \\ \int -D dt & t_1 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

و در نهایت معادله میزان موجودی در دست در زمان  $t$  به صورت زیر خواهد بود:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{D}{\theta} [e^{\theta(t_1-t)} - 1] & 0 < t < t_1 \\ -D(t - t_1) & t_1 < t < T \end{cases} \quad (4)$$

با قرار دادن مقادیر  $t = T$  و  $t = 0$  در معادله (۴) به ترتیب مقادیر  $I_m$  و  $I_b$  به دست می‌آیند:

$$I_m = I(0) = \frac{D}{\theta} [e^{\theta t_1} - 1] \quad (5)$$

$$I_b = I(T) = -D(T - t_1) \quad (6)$$

همچنین میزان سفارش‌دهی نیز از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$Q = I_m + |I_b| \quad (7)$$

لازم به ذکر است که علامت  $I_b$  منفی است (برای نشان دادن میزان کمبود) و برای محاسبه میزان سفارش ( $Q$ ) قدر مطلق آن وارد محاسبات شده است:

$$Q = \frac{D}{\theta} [e^{\theta t_1} - 1] - D(t_1 - T) \quad (8)$$

در ادامه به محاسبه هزینه‌های کنترل تولید و موجودی می‌پردازیم.

### هزینه ثابت سفارش دهی

با توجه به اینکه در هر دوره فقط یک بار سفارش انجام می‌گیرد و هزینه ثابتی دارد، ( $A$ ) مجموع هزینه سفارش‌دهی در واحد زمان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_o = \frac{A}{T} \quad (9)$$

### هزینه نگهداری موجودی

برای محاسبه هزینه نگهداری، ابتدا نیاز است میزان متوسط موجودی در سیکل ( $\bar{I}$ ) محاسبه شود. از آنجایی که فقط در بازه زمانی  $(0, t_1)$  سطح موجودی در دست در سیستم، مثبت است و موجودی در سیستم نگهداری می‌شود و در بازه زمانی  $(t_1, T)$  موجودی برای نگهداری وجود ندارد، میزان متوسط موجودی به این ترتیب محاسبه خواهد شد:

## هزینه فساد کالا

برای محاسبه هزینه فساد در هر دوره، ابتدا لازم است میزان محصولی که در هر دوره فاسد می‌شود را به طور متوسط محاسبه کنیم. از آنجایی که در هر لحظه مشخص زمانی مانند  $t$ ، میزان مشخصی از موجودی در دست (یعنی نسبت مشخصی از موجودی در دست  $(\theta)$ ) فاسد می‌شود، بنابراین در هر لحظه از دوره، میزان فساد برابر با  $\theta I(t)$  خواهد بود و مقدار کالای فاسد شده در کل دوره به این شکل محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \text{Deteriorated goods per cycle} &= \int_0^{t_1} \theta I(t) dt \\ &= \int_0^{t_1} \theta \frac{D}{\theta} [e^{\theta(t-t_1)} - 1] dt = D \int_0^{t_1} [e^{\theta(t-t_1)} - 1] dt \\ &= D \left[ -\frac{1}{\theta} e^{\theta(t-t_1)} - t \right]_0^{t_1} = D \left[ -\frac{1}{\theta} - t_1 + \frac{1}{\theta} e^{\theta t_1} \right] \\ \text{Deteriorated goods per cycle} &= \frac{D}{\theta} e^{\theta t_1} - Dt_1 - \frac{D}{\theta} \quad (17) \end{aligned}$$

با توجه به مقدار محاسبه شده برای میزان کالای فاسد شده در هر دوره، مقدار کل هزینه فساد در واحد زمان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC_d = \frac{\left[ \frac{D}{\theta} e^{\theta t_1} - Dt_1 - \frac{D}{\theta} \right] \times c_d}{T} \quad (18)$$

با توجه به کوچک بودن مقدار  $\theta$ ، می‌توان از بسط تیلور به صورت  $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$  استفاده کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$TC_d = \frac{D}{\theta} \left[ 1 + \theta t_1 + \frac{1}{2} \theta^2 t_1^2 - \theta t_1 - 1 \right] c_d = \frac{D \theta c_d t_1^2}{2T} \quad (19)$$

بنابراین با توجه به هزینه‌های محاسبه شده بالا، کل هزینه کنترل تولید و موجودی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$TC = \frac{A}{T} + \frac{icDt_1^2}{2T} + \frac{\pi D(T-t_1)^2}{2T} + \frac{cD}{T} \left( \frac{\theta t_1^2}{2} + T \right) + \frac{D\theta c_d t_1^2}{2T} \quad (20)$$

## روش حل

با توجه به اینکه تابع هدف مسئله، کمینه‌سازی مجموع هزینه‌های کنترل تولید و موجودی است، برای به دست آوردن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله به صورت دقیق و با بهره‌گیری از تکنیک‌های مشتق‌گیری، ابتدا لازم است تحدب تابع هدف مسئله اثبات شود و از آنجایی که

تابع هدف این مسئله بر اساس دو متغیر تصمیم مستقل یعنی  $t_1$  و  $T$  است، برای اثبات تحدب این تابع، از ماتریس هشین به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$HTC(t_1, T) = \begin{bmatrix} t_1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 TC}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 TC}{\partial t_1 \partial T} \\ \frac{\partial^2 TC}{\partial T \partial t_1} & \frac{\partial^2 TC}{\partial T^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ T \end{bmatrix} \quad (21)$$

برای محاسبه  $HTC(t_1, T)$  نیاز است مشتق‌های جزئی تابع هدف ( $TC$ ) نسبت به متغیرهای تصمیم ( $t_1, T$ ) محاسبه شوند:

$$\frac{\partial TC}{\partial t_1} = \frac{icDt_1}{T} + \frac{\pi D}{T}(t_1 - T) + \frac{cD\theta t_1}{T} + \frac{c_d \theta D t_1}{T} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial t_1^2} = \frac{icD}{T} + \frac{\pi D}{T} + \frac{cD\theta}{T} + \frac{c_d \theta D}{T} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial t_1 \partial T} = -\frac{icDt_1}{T^2} - \frac{\pi Dt_1}{T^2} - \frac{cD\theta t_1}{T^2} - \frac{c_d \theta D t_1}{T^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial T} = -\frac{A}{T^2} - \frac{icDt_1^2}{2T^2} + \frac{\pi D}{2} \left( 1 - \frac{t_1^2}{T^2} \right) - \frac{cD\theta t_1^2}{2T^2} - \frac{c_d \theta D t_1^2}{2T^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial T^2} = \frac{2A}{T^3} + \frac{icDt_1^2}{T^3} + \frac{\pi Dt_1^2}{T^3} + \frac{cD\theta t_1^2}{T^3} + \frac{c_d \theta D t_1^2}{T^3} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial T \partial t_1} = -\frac{icDt_1}{T^2} - \frac{\pi Dt_1}{T^2} - \frac{cD\theta t_1}{T^2} - \frac{c_d \theta D t_1}{T^2} \quad (27)$$

با توجه به مشتق‌های جزئی محاسبه شده  $HTC(t_1, T)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$HTC(t_1, T) = \frac{2A}{T} > 0 \quad (28)$$

با توجه به این نکته که همه پارامترهای مدل، بزرگ‌تر و یا مساوی صفر هستند، بدیهی است که عبارات  $\frac{2A}{T}$  و همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر خواهد بود. بنابراین مقدار  $HTC(t_1, T)$  همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر خواهد بود ( $HTC(t_1, T) \geq 0$ ) و در نتیجه تابع هدف مسئله که شامل هزینه‌های کنترل تولید و موجودی است، همواره محدب است.

$$c_0 > c_1 > c_2 > \dots > c_n$$

$$c_j(Q) = \begin{cases} c_0 & \text{for } q_0 \leq Q < q_1 \\ c_1 & \text{for } q_1 \leq Q < q_2 \\ \dots & \\ c_n & \text{for } q_n \leq Q < q_{n+1} \end{cases} \quad (34)$$

بنابراین به ازای مقادیر مختلف میزان سفارش و قیمت خرید متناسب با آن، تابع هزینه کل به صورت زیر خواهد بود:

$$TC_j = \frac{A}{T} + \frac{ic_j D t_1^2}{2T} + \frac{\pi D (T - t_1)^2}{2T} + \frac{c_j D \left( \frac{\theta t_1^2}{2} + T \right) + \frac{D \theta c_d t_1^2}{2T}}{T} \quad q_j \leq Q < q_{j+1} \quad (35)$$

در ادامه به معرفی سه لم که در روش حل، مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

$$TC_0(Q) > TC_1(Q) > TC_2(Q) > \dots > TC_n(Q) \quad \text{لم ۱.}$$

#### اثبات لم ۱.

با توجه به تابع هزینه کل ( $TC_j$ ) بدیهی است که با تغییر مقدار قیمت خرید ( $c_j$ ) فقط مقادیر هزینه‌های نگهداری یعنی عبارت  $\frac{ic_j D t_1^2}{2T}$  و هزینه خرید یعنی عبارت  $\frac{c_j D \left( \frac{\theta t_1^2}{2} + T \right)}{T}$  تغییر خواهند کرد و از آنجایی که هر دو عبارت، تابعی فقط صعودی از  $c_j$  هستند، با کاهش مقدار هزینه خرید مقادیر این عبارات و در نتیجه مقدار تابع هدف کاهش خواهد یافت. بنابراین خواهیم داشت:

$$TC_0(Q) > TC_1(Q) > TC_2(Q) > \dots > TC_n(Q)$$

$$Q_{wd}^*(n) > Q_{wd}^*(n-1) > \dots > Q_{wd}^*(1) > Q_{wd}^*(0) \quad \text{لم ۲.}$$

#### اثبات لم ۲.

با کاهش قیمت خرید ( $c$ )، با توجه به رابطه (۳۱) مقدار  $T^*$  افزایش می‌یابد و نیز با توجه به رابطه (۲۹) با افزایش مقدار  $T^*$  و همچنین مقدار عبارت  $\frac{\pi}{ic + \pi + c\theta + \theta c_d}$  مقدار  $t_1^*$  نیز افزایش خواهد یافت. همان طور که در بخش‌های قبلی اثبات شد، مقدار بهینه میزان سفارش بدون در نظر گرفتن تخفیف ( $Q_{wd}^*$ ) از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود. با توجه به کوچک بودن

#### به دست آوردن مقادیر بهینه $T^*$ و $t_1^*$

با توجه با اینکه تابع هدف مسئله، همواره محدب است، برای به دست آوردن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مدل ( $t_1^*, T^*$ ) کافی است مقادیر مشتق‌های اول تابع هدف ( $TC$ ) را نسبت به  $t_1$  و  $T$  محاسبه کرده و مساوی مقدار صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial TC}{\partial t_1} = 0 \rightarrow \frac{ic D t_1^*}{T^*} + \frac{\pi D}{T^*} (t_1^* - T^*) + \frac{c D \theta t_1^*}{T^*} + \frac{c_d \theta D t_1^*}{T^*} = 0$$

$$t_1^* = \frac{\pi}{ic + \pi + c\theta + \theta c_d} T^* \quad (29)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial T} = 0 \rightarrow \frac{A}{T^2} + \frac{t_1^{*2}}{T^2} \left[ \frac{D}{2} (ic + \pi + c\theta + \theta c_d) \right] = \frac{\pi D}{2} \quad (30)$$

برای به دست آوردن مقدار بهینه  $T^*$  مقدار به دست آمده برای  $t_1^*$  از رابطه (۲۹) را در رابطه (۳۰) جایگذاری کرده و داریم:

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{\pi D - \frac{D\pi^2}{ic + \pi + c\theta + \theta c_d}}} \quad (31)$$

با به دست آوردن مقدار  $T^*$ ، مقدار بهینه  $t_1^*$  نیز جایگذاری مقدار  $T^*$  در رابطه (۲۹) محاسبه می‌شود:

$$t_1^* = \sqrt{\frac{2A \left( \frac{\pi}{ic + \pi + c\theta + \theta c_d} \right)^2}{\pi D - \frac{D\pi^2}{ic + \pi + c\theta + \theta c_d}}} \quad (32)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۸) که در قسمت‌های قبلی محاسبه شد، میزان سفارش بهینه بدون در نظر گرفتن تخفیف مقداری از سوی فروشنده، از این رابطه قابل محاسبه است:

$$Q_{wd}^* = \frac{D}{\theta} (e^{\theta t_1^*} - 1) - D(t_1^* - T^*) \quad (33)$$

#### در نظر گرفتن سیاست تخفیف کلی

در حالتی که تخفیف مقداری از نوع کلی، از سوی فروشنده ارائه می‌شود، برای مقادیر معلوم  $q_0, q_1, \dots, q_n$  در صورتی که میزان سفارش ( $Q$ ) در محدوده  $q_j \leq Q < q_{j+1}$  قرار گیرد، قیمت خرید هر واحد محصول برای همه  $Q$  واحد برابر با  $c_j$  خواهد بود؛ به نحوی که:

مقدار  $\theta$ ، می‌توان از بسط تیلور به صورت  $e^{\theta k} = 1 + \theta k + \frac{1}{2}(\theta k)^2$  استفاده کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Q_{wd}^* = \frac{D}{\theta} \left( 1 + \theta t_1^* + \frac{1}{2} \theta^2 t_1^{*2} - 1 \right) - D(t_1^* - T^*) = DT^* + \frac{1}{2} D \theta t_1^{*2} \quad (36)$$

اما در صورتی که  $Q_{wd}^*(j)$  خارج از بازه قابل قبول خود قرار گیرد، دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱. مقدار  $Q_{wd}^*(j)$  بیشتر از نقطه شکست انتهایی بازه سفارش مربوط به  $c_j$  است ( $Q_{wd}^*(j) > q_{j+1}$ )، که در این حالت نقطه انتهایی بازه سفارش، میزان سفارش بهینه خواهد بود:

$$Q_j^* = q_{j+1}$$

۲. مقدار  $Q_{wd}^*(j)$  کمتر از نقطه شکست ابتدایی بازه سفارش مربوط به  $c_j$  است ( $Q_{wd}^*(j) < q_j$ )، که در این حالت نقطه ابتدایی بازه سفارش، میزان سفارش بهینه خواهد بود:

$$Q_j^* = q_j$$

با توجه به سه لم ذکرشده که به اثبات رسید و همچنین تحدب تابع هزینه کل، نمودار تابع هدف مسئله بر حسب میزان سفارش صادر شده به صورت شکل (۳) خواهد بود.

با توجه به رابطه بالا، با کاهش قیمت خرید ( $c$ )، منجر به افزایش مقادیر بهینه  $T^*$  و  $t_1^*$  نیز می‌شود، میزان سفارش بهینه بدون در نظر گرفتن تخفیف ( $Q_{wd}^*$ ) نیز افزایش خواهد یافت. بنابراین خواهیم داشت:

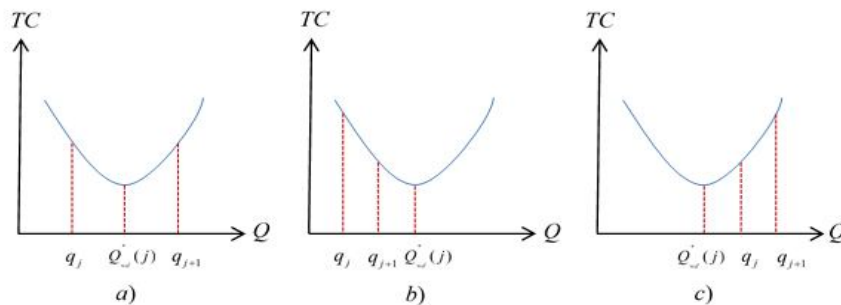
$$Q_{wd}^*(n) > Q_{wd}^*(n-1) > \dots > Q_{wd}^*(1) > Q_{wd}^*(0)$$

**لم ۳.**

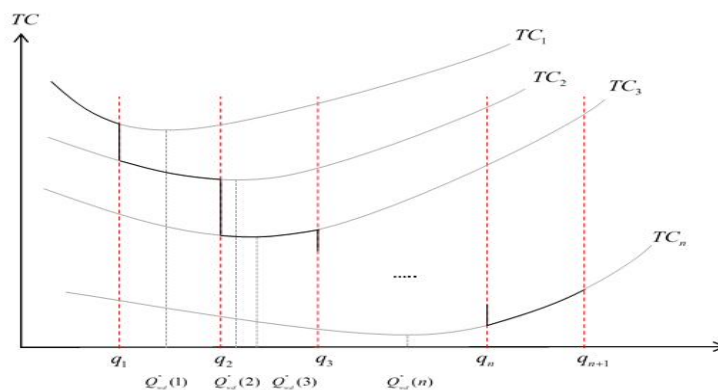
- (a) if  $q_j \leq Q_{wd}^*(j) < q_{j+1}$  then  $Q_j^* = Q_{wd}^*(j)$
- (b) if  $Q_{wd}^*(j) > q_{j+1}$  then  $Q_j^* = q_{j+1}$
- (c) if  $Q_{wd}^*(j) < q_j$  then  $Q_j^* = q_j$

### اثبات لم ۳.

با توجه به محدب بودن تابع هزینه کل که پیش‌تر با استفاده از ماتریس هشین به اثبات رسید و همچنین با توجه به شکل (۲)، برای هر قیمت خرید مشخص ( قابل قبول قیمت مربوطه قرار گیرد)



شکل ۲: نمودار هزینه کل و مقدار سفارش بهینه برای بازه‌های مختلف در حالات مختلف تخفیف مقداری



شکل ۳: نمودار تابع هزینه کل بر حسب میزان سفارش

$$j = 4$$

$$T_4^* = 3.286, t_{14}^* = 3.043$$

$$Q_{wd}^*(4) = 83.328 \rightarrow Q_{wd}^*(4) \notin (100, \infty)$$

$$j = 3$$

$$T_3^* = 3.113, t_{13}^* = 2.856$$

$$Q_{wd}^*(3) = 78.847 \rightarrow Q_{wd}^*(3) \notin (80, 100]$$

$$j = 2$$

$$T_2^* = 2.966, t_{12}^* = 2.697$$

$$Q_{wd}^*(2) = 75.079 \rightarrow Q_{wd}^*(2) \in (60, 80]$$

## گام ۲:

$$TC \Big|_{Q=Q_{wd}^*(2)} = 233.7$$

$$TC \Big|_{Q=80} = 211.002$$

$$TC \Big|_{Q=100} = 204.443$$

$$TC^* = \min \left\{ TC \Big|_{Q=Q_{wd}^*(2)}, TC \Big|_{Q=80}, TC \Big|_{Q=100} \right\} = 204.443$$

با توجه به محاسبات بالا، جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$T^* = 3.97$$

$$t_1^* = 2.5$$

$$Q^* = 100$$

$$TC^* = 204.443$$

$$I_m^* = 63$$

$$I_b^* = 37$$

## تحلیل حساسیت

تغییر در مقادیر پارامترهای مسئله، منجر به نبود قطعیت در تصمیم‌گیری می‌شود. برای بررسی این تغییرات و تأثیر آن‌ها در تصمیم‌گیری، آنالیز حساسیت، ابزار بسیار مفیدی است. در این قسمت روی مثال عددی ارائه شده در قسمت قبل، آنالیز حساسیتی به ازای مقادیر مختلف پارامترها ارائه می‌شود. در جداول ۱ و ۲ مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم و تابع هدف مسئله به ازای مقادیر مختلف پارامترهای نرخ فساد و مقدار تقاضا، محاسبه شده است. در جدول (۳) نیز مقدار بهینه تابع هدف مسئله به ازای تغییر همزمان نرخ فساد و تقاضای کالا، محاسبه شده است و در جدول (۴) نیز مقدار بهینه میزان سفارش به ازای تغییر همزمان نرخ فساد و تقاضای کالا، محاسبه شده است.

## الگوریتم یافتن مقدار سفارش بهینه

در این قسمت الگوریتمی را شامل دو گام که هر یک از این گام‌ها بنا به مسئله مورد بررسی، ممکن است چندین مرحله داشته باشند، برای یافتن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مسئله ارائه خواهیم کرد.

### گام ۱: به دست آوردن مقدار سفارش قابل قبول

از دسته‌ای که کمترین قیمت خرید را دارد، شروع به محاسبه مقادیر  $t_{1j}^*$  و  $T_j^*$  و همچنین مقدار  $Q_{wd}^*(j)$  می‌کنیم و این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم تا به اولین مقدار  $Q_{wd}^*(j)$  قابل قبول برسیم. به عبارت دیگر مقادیر  $T_j^*$  و  $t_{1j}^*$  و همچنین مقدار  $Q_{wd}^*(j)$  را به ازای  $j = n, j = n-1, \dots$  با استفاده از روابط (۳۱)، (۳۲) و (۳۳) محاسبه می‌کنیم تا جایی که برای اولین بار برای مقداری از  $j$  مانند  $k$  رابطه  $q_k \leq Q_{wd}^*(k) < q_{k+1}$  برقرار باشد. لازم به ذکر است که با توجه به سه خاصیت اثبات شده برای تخفیف مقداری کلی، یک و فقط یک مقدار برای میزان سفارش قابل قبول به دست خواهد آمد.

### گام ۲: تعیین میزان سفارش بهینه

مقدار هزینه کل ( $TC_j$ ) را برای  $Q_{wd}^*(j)$  و نیز نقاط شکست قبلی یعنی مجموعه  $\{q_j | j = k, k+1, \dots, n-1, n\}$  محاسبه می‌کنیم، نقطه‌ای که کمترین هزینه کل را داشته باشد، به عنوان میزان سفارش بهینه  $Q^*$  انتخاب می‌کنیم.

## مثال عددی و تحلیل حساسیت

### مثال عددی

فرض می‌کنیم پارامترهای ثابت مدل، به صورت زیر باشند:

$$A = 50, i = 0.04, \pi = 5, D = 25, \theta = 0.01,$$

$$c_d = 10$$

$$c_j = \begin{cases} 9 & 0 \leq Q \leq 60 \\ 8 & 60 \leq Q < 80 \\ 7 & 80 \leq Q < 100 \\ 6 & 100 \leq Q \end{cases}$$

با استفاده از روش حل ارائه شده در مقاله، مقادیر بهینه طول دوره و مقداری از دوره که باید سطح موجودی در دست مثبت باشد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

### گام ۱:



جدول ۱: نتایج مثال عددی به ازای مقادیر مختلف نرخ فساد

$\theta$	$t_1^*$	$T^*$	$Q^*$	$I_m^*$	$I_b^*$	$TC^*$
0.01	2.5	3.97	100	63	37	204.44
0.05	2.5	3.84	100	67	33	213.40
0.1	2.5	3.69	100	71	29	226.49
0.15	1.25	2.28	60	34	26	276.88

جدول ۲: نتایج مثال عددی به ازای مقادیر مختلف تقاضا

$D$	$t_1^*$	$T^*$	$Q^*$	$I_m^*$	$I_b^*$	$TC^*$
25	2.5	3.97	100	63	37	204.44
50	2.15	2.32	117	108	9	343.03
75	1.76	1.90	143	132	11	502.70
100	1.52	1.64	165	153	12	660.85

جدول ۳: تغییرات تابع هزینه بهینه نسبت به تغییرات همزمان نرخ فساد و میزان تقاضای کالا در مثال عددی

هزینه کل		$\theta$			
		0.01	0.05	0.10	0.15
$D$	25	204.44	213.40	226.49	276.88
	50	343.03	377.96	392.50	452.14
	75	502.70	566.65	574.75	583.08
	100	660.85	692.79	719.31	735.34

جدول ۴: تغییرات میزان سفارش بهینه نسبت به تغییرات همزمان نرخ فساد و میزان تقاضای کالا در مثال عددی

میزان سفارش بهینه		$\theta$			
		0.01	0.05	0.10	0.15
$D$	25	100	100	100	60
	50	117	100	100	100
	75	143	100	100	100
	100	165	110	100	100

عملکرد و روش حل مسئله پی برد و نیز از چگونگی تأثیر نوسانات تقاضا بر سیاست سفارش‌دهی مطلع شد.

با توجه به تحلیل حساسیت انجام‌شده، می‌توان تأثیر تغییر در پارامترهای مسئله را بر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم مشاهده کرد و به درستی مدل‌سازی و نحوه

این مدل، پس از به دست آوردن عوامل هزینه‌ای اساسی تأثیرگذار در کنترل موجودی‌ها و محاسبه تابع هزینه کل، به اثبات تحذب این تابع نسبت به متغیرهای تصمیم مسئله پرداخته شده است و با استفاده از تکنیک‌های مشتق‌گیری و ارائه الگوریتمی کارآمد، جواب بهینه مسئله به طور دقیق محاسبه شده است. در ادامه، برای بررسی نحوه عملکرد مدل به ارائه مثال عددی پرداخته شده و برای پارامترهای کلیدی مدل، نظیر نرخ فساد و تقاضای کالا، تحلیل حساسیت انجام شده است و کارآیی مدل با کمک این مثال عددی و تحلیل حساسیت انجام‌شده، نشان داده شده است و مشخص شد که همواره با افزایش نرخ فساد، میزان هزینه‌های موجودی افزایش می‌یابد. بنابراین شایسته است با به‌کارگیری روش‌های مناسب نگهداری محصول و کاهش نرخ فساد تا حد امکان، هزینه‌های موجودی را کاهش داد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود، هر چه نرخ فساد کالا افزایش می‌یابد، باید میزان سفارش در هر بار سفارش‌دهی را کاهش و در مقابل، تعداد دفعات سفارش‌دهی را افزایش داد تا از فساد محصول و افزایش هزینه جلوگیری شود.

### پیشنهادات و تحقیقات بعدی

- برای تحقیقات بعدی می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:
- ترکیب انواع مختلف تقاضا مثل تقاضای وابسته به قیمت، تقاضای وابسته به تورم، تقاضای وابسته به زمان و تقاضای وابسته به سطح موجودی و ... و در نظر گرفتن تقاضاهای ترکیبی برای کاربردی‌تر بودن و انطباق بسیار زیاد با شرایط کشور.
  - وارد کردن قیمت‌گذاری در مدل‌ها و تعیین قیمت فروش بهینه، علاوه بر تعیین اندازه انباشته بهینه و میزان کمبود و ...
  - استفاده از مدل‌های تخفیف در قیمت مختلف و در نظر گرفتن شرایط تخفیف واقعی‌تر و کاربردی‌تر برای مشتری. برای مثال می‌توان از تخفیف‌های تصادفی در زمان‌های تصادفی استفاده کرد.

همچنین همان طور که مشخص است، همواره با افزایش نرخ فساد، میزان هزینه‌های موجودی افزایش می‌یابد. بنابراین شایسته است با به‌کارگیری روش‌های مناسب نگهداری محصول و کاهش نرخ فساد تا حد امکان، هزینه‌های موجودی را کاهش داد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود هر چه نرخ فساد کالا افزایش می‌یابد، باید میزان سفارش در هر بار سفارش‌دهی را کاهش و در مقابل، تعداد دفعات سفارش‌دهی را افزایش داد تا از فساد محصول و افزایش هزینه جلوگیری شود.

### نتیجه‌گیری

بر خلاف مدل‌های سنتی، کنترل موجودی که در آن‌ها از فرض‌های ساده‌کننده استفاده می‌شود، با توجه به شرایط حاکم بر دنیای امروز، پارامترها، محدودیت‌ها، متغیرهای تصمیم، توابع هدف و فرضیات جدیدتری به مسائل برنامه‌ریزی تولید موجودی‌ها افزوده می‌شود. از جمله این عوامل می‌توان به فسادپذیری محصولات، در نظر گرفتن قیمت‌گذاری، سیاست‌های انگیزشی نظیر تخفیف در قیمت خرید و در نظر گرفتن توابع واقعی‌تر برای تقاضای کالا اشاره کرد. با توجه به مطالعات انجام گرفته، سه مشخصه فسادپذیر بودن، تخفیف مقداری در قیمت و کمبود، از مشخصه‌های قابل توجه در مبحث کنترل تولید و موجودی‌ها هستند که با مرور مطالعات قبلی، تا کنون مدلی با در نظر گرفتن این سه مشخصه به طور همزمان و ارائه راه حل دقیق ارائه نشده است. لازم به ذکر است که در همه مقالاتی که در قسمت مرور ادبیات، با عنوان مدل‌های کنترل موجودی از نوع خرید، با در نظر گرفتن تخفیف، کمبود و فسادپذیری کالا مطرح شدند، تخفیف به کار گرفته شده، به صورت درصدی ثابت در سال‌های مختلف و در حقیقت تخفیف در قیمت بر اساس زمان‌های گوناگون و با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول بوده است و در هیچ یک از این مقالات، به در نظر گرفتن تخفیف مقداری برای خریدار و ارائه قیمت‌های خرید مختلف بر اساس حجم سفارش صادر شده، پرداخته نشده است.

در این مقاله، به بررسی مدل کنترل موجودی برای کالاهای فسادپذیر با در نظر گرفتن تخفیف مقداری از سوی فروشنده و همچنین مجاز بودن کمبود، زمانی که نرخ تقاضا به صورت ثابت سالیانه است، پرداخته شد. در

گرفته شده است، مانند در نظر گرفتن نرخ‌های فساد وابسته به زمان و ... با در نظر گرفتن توابع مختلف و یا در نظر گرفتن نرخ فساد احتمالی.

توسعه مدل‌هایی با توابع هدف مختلف از جمله حداقل کردن هزینه‌ها، حداکثر کردن سود، حداکثر کردن سطح خدمت، حداقل کردن سطح موجودی و کمبود، حداکثر کردن سطح مطلوبیت و ...

- مدل‌سازی در شرایط نبود قطعیت و ابزارهای آن نظیر برنامه‌ریزی احتمالی، تئوری فازی، برنامه‌ریزی بازه‌ای، برنامه‌ریزی استوار و ... برای پارامترهایی از مدل که به طور قطعی و دقیق قابل برآورد نیستند و یا برآورد دقیق آن‌ها هزینه زیادی به سیستم تحمیل می‌کند.
- استفاده از نرخ‌های مختلف فساد در مدل‌هایی که در آن‌ها، فرض فسادپذیری محصول در نظر

## مراجع

- 1- Harris, F.W. (1913). "How many parts to make at once, Factory." *The Magazine of Management*, 10 (2), PP. 135-136.
- 2- Whitin, T.M. (1953). "The Theory of Inventory Management." Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.
- 3- Goyal, S.K. and Giri, B.C. (2001). "Receipt trends in modeling of deteriorating inventory." *European Journal of Operational Research*, 134, PP. 1-16.
- 4- Bakker, M., Riezebos, J. and Teunter, R.H. (2012). "Review of inventory systems with deterioration since 2001." *European Journal of Operational Research*, 221, PP. 275-284.
- 5- Jolai, F., Rabbani, M. and Honarvar, M. (2006). "Continuous review inventory model for deteriorating items with no shortage, stochastic demand, and expedited ordering." *Journal of University College Of Engineering*, University of Tehran, Vol. 40, PP. 487-494.
- 6- Mirzazadeh, A., Seyed Esfehiani, M. and Fatemi, M. (2006). "Determining economic order policy for deteriorating items with time-dependent inflation." *Journal of University College Of Engineering*, University of Tehran, Vol. 40, PP. 585-595.
- 7- Jolai, F., Gheisariha, E. and Nojavan, F. (2011). "Inventory Control of Perishable Items in a Two-Echelon Supply Chain." *Journal of Industrial Engineering*, University of Tehran, Special Issue, PP. 69-77.
- 8- Crowther, J.F. (1964). "Rationale for quantity discounts." *Harvard Business Review* 42, pp. 121-127.
- 9- Lu, L. and Qui, Y. (1994). "Worst case performance of a power of two policy for the quantity discount model." *J. Eurp. J. Op. Res Soc.*, 45, PP. 1206-1210.
- 10- Bastian, M. (1992). "A perfect lot-tree procedure for the discounted dynamic lot-size problem with speculation", *Naval Research Logistics*, 30, PP. 651-668.
- 11- Chao, Hung, P.O. (1992). "The EOQ model with stochastic demand and discounting." *European J. of Op. Res*, 59, PP. 434-443.
- 12- Martin, G.E. (1993). "A buyer-independent quantity discount pricing alternatives." *OMEGA*, 21, PP. 567-572.
- 13- Shah, N. H. and Dixit, V. M. (2005). "Price discount strategies A review." *Revista Investigacion operacional*, Vol. 26, No. 1, PP. 19-32.
- 14- Zipkin, P.H. (2000). "Foundations of Inventory Management." McGraw-Hill, New York.

- 15- Pentico, D.W. and Drake, M.J. (2011). "A survey of deterministic models for the EOQ and the EPQ with partial backordering." *European Journal of Operational Research*, 214, PP. 179–198.
- 16- Chung, K.J. and Lin, C.N. (2001). "Optimal inventory replenishment models for deteriorating items taking account of time discounting." *Computers & Operations Research*, 28, PP. 67-83.
- 17- Moon, I., Chandra Giri, B. and Ko, B. (2005). "Economic order quantity models for ameliorating or deteriorating items under inflation and time discounting." *European Journal of Operational Research*, 162, PP. 773–785.
- 18- Hou, K.L.(2006). "An inventory model for deteriorating items with stock dependent consumption rate and shortages under inflation and time discounting." *European Journal of Operational Research*, 168, PP. 463–474.
- 19- Dye, C.Y., Ouyang, L.Y. and Hsieh, T.P. (2007). "Inventory and pricing strategies for deteriorating items with shortages a discount cash flow approach.", *Computers & Industrial Engineering*, 52, PP. 29–40.

### واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Harris
- 2- Whitin
- 3- Goyal
- 4- Giri
- 5- Bakker
- 6- Crowther
- 7- EOQ
- 8- Lu
- 9- Qui
- 10- Bastian
- 11- Chao
- 12- Martin
- 13- Shah
- 14- Dixit
- 15- Zipkin
- 16- Pentiko
- 17- Drake
- 18- Chuan
- 19- Lin
- 20- Moon
- 21- Hou
- 22- Dye