مدل‌سازی مسئله مکان‌یابی متوازن با استفاده از مدل جاذبه روی شبکه و حل آن به کمک یک رویکرد ابتکاری مؤثر

مریم امیدبخش[۱]، جعفر باقری‌نژاد[۲] و مهدی سیف‌برقی[۲]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه الزهرا(س)

[۲] استادیار گروه مهندسی صنایع دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه الزهرا (س)

(تاریخ دریافت ۹۰/۴/۱۱، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۰/۵/۱۵، تاریخ تصویب ۹۰/۷/۱۶)

چکیده

در این مقاله یک مفهوم جدید در حوزه مکان‌یابی، به نام "مسئله مکان‌یابی با بار کاری متوازن بر مبنای مدل جاذبه" معرفی شده است. متوازن‌سازی در جستجوی توزیع عادلانه تقاضا یا برقراری تعادل در ظرفیت تسهیلات هنگام پاسخگویی به تقاضای مشتریان است؛ به طوری که آنها تسهیلات را بر اساس معیار مناسب‌تری مانند قانون جاذبه انتخاب کنند.تابع هدف درصدد کمینه‌سازی حداکثر بار کاری موجود بین تسهیلات، هزینه استقرار آنها و هزینه جابه‌جایی تا مشتریان، با در نظر گرفتن مدل جاذبه است. در ادامه، بر اساس ساختار مسئله، یک رویکرد حل ابتکاری طراحی و روی مثال‌های عددی با ابعاد مناسب با روش دقیق، تحلیل مقایسه‌ای انجام شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که رویکرد حل پیشنهادی، با میانگین اختلاف تقریبا ۶ درصد و زمان محاسباتی قابل قبول، روشی بسیار کارآ بوده و جواب‌های نزدیک به بهینه را برای مثال‌های تصادفی تولیدشده ایجاد می‌کند.

واژه‌های کلیدی:مکان‌یابی تسهیلات، متعادل‌سازی، قانون جاذبه، بار متوازن، الگوریتم ابتکاری، برنامه‌ریزی عدد صحیح

مقدمه

در طول دهه‌های اخیر تلاش فراوانی برای ایجاد مدل-های مکان‌یابی که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند انجام گرفته است. یکی از این مشخصه‌ها که در متدولوژی‌های جدید تحقیق در عملیات ظاهر شده، مفهوم "تعادل" است. مشتریان یک سیستم، براساس قوانین اجتماعی انتظار رفتار عادلانه دارند. بنابراین تصمیمات مکان‌یابی این مسائل می‌تواند استقرار مراکز در مکان‌هایی باشد که با در نظر گرفتن معیارهای خاصی، با کاربران به روشی *عادلانه* رفتار شود.یک طبقه‌بندی از اهداف مکان‌یابی، آنها را براساس مفاهیم فیزیکیِ نیروهای کششی، فشاری و تعادل به سه دسته تقسیم کرده است [۱]:

۱- دسته اول اهداف کششی هستند و تمایل دارند به هر طریقی نزدیک بودن تسهیلات و نقاط تقاضا را تضمین کنند، مانند حداقل‌کردن هزینه‌های حمل‌ونقل یا حداکثرکردن سهم بازار. اکثر تحقیقات انجام گرفته تا اواسط دهه ۱۹۶۰،دربرگیرنده این دسته از اهداف هستند. این مدل‌ها برای مکان‌یابی تسهیلات مطلوب یا جذاب به‌کار می‌روند. در میان هزاران مدل بررسی‌شده، می‌توان به چهار مدل مکان‌یابی p-میانه، p-مرکز، مکان‌یابی با ظرفیت نامحدود و تخصیص‌نمایی اشاره کرد که زمانی با عنوان مسائل مکان‌یابی الگو شناخته می‌شدند و همچنان نقش بارزی در این حوزه ایفا می‌کنند.

۲- از دهه ۱۹۷۰ محققان به مطالعه مدل‌هایی پرداختند که در آنها مشتریان خواهان دورکردن تسهیلات و استقرار آنها در دورترین نقطه بودند. این نوع اهداف با عنوان اهداف فشاری نام‌گذاری می‌شوند و شامل مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب یا زیان‌آور و مدل‌های پراکندگی است.

۳- سومین دسته از اهداف، دستیابی به تعادل است. این مدل‌ها تلاش می‌کنند تسهیلات را طوری مکان‌یابی کنند که مثلا فواصل نقاط تا حد امکان "مشابه" یکدیگر باشند.

مشخصه دیگری که در مکان‌یابی موردتوجه قرار دارد، نحوه انتخاب خدمت‌دهنده است. در اینحالت، اغلب فرض می‌شود مشتریان نزدیک‌ترین تسهیل را انتخاب می‌کنند. چنین فرضی (فرض مجاورت)، هنگامی منطقی به‌نظر می-رسد که تخصیص تقاضا توسط برنامه‌ریز انجام گیرد یا

* نویسنده مسئول : تلفن :۰۵۱۱ -۸۶۸۴۶۵۰ , فاکس : ۸۸۰۳۵۱۸۷ ، Email: maryam.omidbakhsh86@gmail.com

تسهیلات به‌طور مساوی جذاب هستند. در این‌صورت، نزدیک‌ترین تسهیل، بهترین انتخاب به‌شمار می‌آید[۵-۲]. دلایل بسیاری برای اینکه چرا این فرض توصیف‌کننده واقعی رفتار مشتری نیست، وجود دارد، به‌عنوان مثال [۶]:

۱- تغییر کوچکی در مکان تسهیلات، ممکن است تقاضای یک منطقه را به تسهیل دیگری انتقال دهد. اگر نزدیک‌ترین تسهیل در فاصله ۴.۹ مایلی و نزدیک‌ترین تسهیل دوم در فاصله ۵ مایلی باشد، کل تقاضا به تسهیل اول اختصاص می‌یابد. در حالی‌که اگر اولین تسهیل در فاصله ۵.۱ مایلی قرار گیرد، کل تقاضا به تسهیل دوم اختصاص می‌یابد.

۲- تسهیلات جذابیت متفاوت داشته و برخی مشتریان خواهان طی مسافت به تسهیل *دورتر، ولی جذاب‌تر* هستند.

۳- مشتریان، هنگام انتخاب تسهیل به دلیل ضرورت فاصله دقیق را اندازه نمی‌گیرند، بلکه تسهیلی را انتخاب می‌کنند که احساس می‌کنند به آنها نزدیک‌تر است. افراد به احتمال زیاد درک متفاوتی نسبت به مسافت‌ها داشته و تسهیل انتخاب‌شده توسط آنها یکسان نخواهد بود.

در ادامه ضمن مرور ادبیات مسئله متعادل‌سازی و مدل جاذبه روی توسعه مدل مکان‌یابی بارکاری متعادل با در نظر گرفتن معیار جاذبه، تشریح رویکردهای حل برای ایجاد جواب‌ها و ارائه نتایج محاسباتی روی مثال‌های عددی تصادفی به‌کمک این رویکردها پرداخته می‌شود.

مرور ادبیات

مسئله توازن

تعادل یا توازن اغلب با حداقل‌کردن آنچه به اصطلاح "معیار توازن" نامیده می‌شود، به‌صورت کمی در می‌آید. در حالی‌که برای دستیابی به "کارآیی و اثربخشی" تقریبا توافق جمعی وجود دارد که "میانه و مرکز" به ترتیب معمول‌ترین توابع هدف مورد استفاده‌اند، به‌نظر می‌رسد توافق خاصی در به‌کارگیری یک معیار مناسب برای "متعادل‌سازی" وجود ندارد. بنابراین توابع زیادی را می‌توان در ادبیات یافت که توازن یا عدم توازن را محاسبه می‌کنند. به‌عنوان مثال، مارش و شلینگ ۲۰ معیار متفاوت برای اندازه‌گیری میزان متعادل بودن سناریوهای مختلف مسئله مکان‌یابی تسهیلات ارائه کردند [۷] وایسِلت و لاپورته بحث جالبی در رابطه با نحوه انتخاب معیار توازن متناسب با مسئله انجام دادند[۸]. جدول(۱) معیارهای معمول مورد استفاده در مسائل مختلف متعادل‌سازی را نشان می‌دهد.

جدول ۱: انواع معیارهای مورد استفاده در مسائل توازن

نام		سال	معیار	کاربرد
لورنز	[۹]	۱۹۵۱	معیار منحنی لورنز	توزیع ثروت
شوتز اركوت	[۱۰] [۱۱]	۱۹۵۱ ۱۹۵۳	انحراف میانگین خروجی نسبی (معیار شوتز)	توزیع درآمد اقتصاد
مولیگان هانسنو ژنگ برمن و کاپلان	[۱۲] [۱۳] [۱۳]	۱۹۹۱	انحراف از میانگین خروجی مطلق	مکان‌یابی شبکه مکان‌یابی
میمن کینکید و میمن برمن	[۱۵] [۱۶] [۱۷]	۱۹۸۶ ۱۹۸۹ ۱۹۹۰	واریانس	مکان‌یابی مسائل گراف مکان‌یابی
تامیر	[۱۸]	۱۹۹۱	حداکثر انحراف مطلق	سیستم‌های حمل و نقل و توزیع
مزوس و مسا	[۱۹]	۲۰۰۱	مجموع انحراف مطلق‌های موزون	مکان‌یابی تحت شبکه
درزنر و درزنر	[۲۰]	۲۰۰۷	واریانس و دامنه فاصله تا تسهیلات	مکان‌یابی
درزنر و همکاران	[۲۱]	۲۰۰۹	ضریب جینی	مکان‌یابی
برمن و همکاران	[۲۲]	۲۰۰۹	دامنه حداکثر و حداقل فاصله	مکان‌یابی تسهیلات مسیر شکل
جانتا و همکاران	[۲۳]	۲۰۰۱	envy	مکان‌یابی مراکز اورژانس
باریاتی	[۲۴]	۲۰۱۲	ضریب جینی	مکان‌یابی
هووانگ و همکاران	[۲۵]	۲۰۱۲	انحراف کارایی در پاسخگویی به دریافت‌کنندگان	مسیریابی و تخصیص
تحقیق حاضر (مولفین)		۲۰۱۲	حداکثر بار کاری موجود (ظرفیت)	مکان‌یابی تحت شبکه عمومی با سرویس عادلانه

کوستراوا و اُگریکزاک، از توازن برای حل مسائل چندهدفه استفاده کردند. بر اساس کارآیی پارتو، معیارها غیرقابل قیاس هستند، در حالیکه توازن فرض می‌کند که می‌توان معیارها را در مقیاس مشترک اندازه‌گیری کرد، به‌طوری‌که مقادیر به‌دست آمده نسبت به هر یک، عادلانه باشد. این ویژگی توزیع عادلانه مطلوبیت بین معیارها را مهم‌تر از تخصیص آن به معیار خاصی فرض کرده و تخصیص متعادل مطلوبیت به این روش مدلسازی می-

شود[۲۶]. اُگریکزاک [۲۷]، مسائل مکان‌یابی را به‌صورت مدل‌های چند معیاره بررسی کرد. وی با استفاده از رویکرد مارش و شلینگ[۷]، برای هر مشتری یک تابع هدف اختصاصی در نظر گرفت تا تأثیر یک الگوی مکانی را روی رضایت مشتری اندازه بگیرد. مدل با تعیین توزیع کل تأثیرهای فردی، قادر به معرفی مفهوم کارآیی متوازن می-شود. هووانگ و همکاران مدل‌هایی برای تصمیمات مسیریابی-تخصیص کمک‌های بشردوستانه با تعریف سه معیار توازن و اثربخشی و کارآیی ایجاد کردند[۲۵]. وانگ با ارائه یک مدل تجربی به بررسی توازن در تفریحگاه‌ها و تأثیر آن بر رضایت و وفاداری مشتری پرداخت[۲۸]. استیوانز رابطه بین عدم توازن و نابرابری درآمد و میزان رشد اقتصادی جامعه در آمریکا را مورد بررسی قرار داد[۲۹]. شی و ژو مدلی برای بررسی تأثیر توازن روی ارزیابی سرمایه‌گذاری زیرساخت‌های حمل‌ونقل معرفی و با تحلیل هزینه- فایده مقایسه کردند [۳۰].

همزمان با شکل‌گیری این بخش از ادبیات، زمینه جدیدی از تحقیقات برای مدلسازی مسائل مکان‌یابی با اهداف متوازن ایجاد شد. برمن و کراس، مسائل مکان‌یابی احتمالی را مورد توجه قرار دادند[۳۱]. سورانا و همکاران، متعادل کردن بار کاری را در سیستم‌های ساخت‌یافته زوجی مورد بررسی قرار دادند [۳۲]. مسئله بار کاری متوازن بدون محدودیت پوشش توسط درِزنر و درِزنر، در مسائل مکان‌یابی روی صفحه با فواصل اقلیدسی بررسی شده است [۳۳]. آنهاهمچنین در مطالعه دیگری به مدلسازی مکان‌یابی با دو هدف حداقل کردن واریانس و دامنه مسافت‌ها تا تسهیل پرداختند و آنرا با استفاده از روش مثلث بزرگ-مثلث کوچک حل کردند [۳۴]. بارون و همکارانش، مکان‌یابی روی یک مربع واحد را به‌منظور حداقل کردنِ حداکثر تقاضایی که هر تسهیل با آن مواجه می‌شود و در نظر گرفتن نزدیک‌ترین تخصیص‌ها و محدودیت پوشش مورد بررسی قرار دادند. حدود بالا و پایین برای موجه بودن مسئله و یک الگوریتم ابتکاری برای حل مسئله ایجاد شد [۳۵]. سوزوکیو درِزنر مکان-یابی تسهیلات با حداقل شعاع متوازن برای پاسخ‌گویی به تقاضای یک ناحیه پیوسته را بررسی کردند و برای این مسئله سه تابع هـــدف در نظـــــر گرفتند [۳۶]. برمن و همکاران، مسئله مکان‌یابی شبکه را به نحوی که اوزان جذب‌شده به هر تسهیل نزدیک‌ترین مقدار ممکن به یکدیگر را داشته باشند، مطرح کردند [۲۲]. پورتو و همکاران، مسائل مکان‌یابی تسهیلات گسترده را روی یک شبکه درختی با معیارهای توازن بررسی کردند؛ در حالی که طول شبکه نامحدود و تسهیلات به شکل مسیر در نظر گرفته شده بود. هدف، یافتن مسیری بود که دامنه اختلاف میان کمترین و بیشترین فاصله از یک گره شبکه تا هر تسهیل را حداقل کند [۳۷]. چانتا و همکاران یک مدل مکان‌یابی را برای توزیع متوازن مراکز اورژانس (EMS) علاوه بر توزیع مؤثر فضایی آنها ایجاد کردند[۲۳]. برکی و همکاران، مکان‌های بهینه مراکز مراقبت از سلامتی را در ۴ ایالت آمریکا با درنظر گرفتن معیارهای اثربخشی و توازن جستجو کردند[۳۸]. بارباتی برای حل مسئله مکان‌یابی متوازن براساس ضریب جینی، یک چارچوب مبتنی بر نماینده[۲] ارائه کرد[۲۴].

مدل جاذبه

در اکثر مدل‌های مکان‌یابی، انتخاب خدمت‌دهنده توسط مشتریان بر اساس فرض نزدیک‌ترین تسهیل (فرض مجاورت) انجام می‌گیرد، در حالی‌که این فرض در بسیاری از موقعیت‌ها واقعی به نظر نمی‌رسد.

مدل جاذبه اولین بار توسط رِیلی در سال ۱۹۳۱ مطرح شد. در مسئله مورد نظر، با فرض اینکه یک مشتری در یک شهر میانی نزدیک دو شهر بزرگ قرار دارد، احتمال انتخاب یکی از شهرها نسبت مستقیم با اندازه شهر و نسبت عکس با مربع فاصله تا آن شهر دارد [۳۹]. هاف [۴۰ و ۴۱]، مدل رِیلی را به‌صورت احتمالی برای مدل‌سازی سهم بازار در وضعیت رقابتی و پیش‌بینی رفتار مصرف‌کننده هنگام انتخاب یک فروشگاه مورد استفاده قرار داد. او ثابت کرد احتمال انتخاب یک فروشگاه توسط مصرف‌کننده متناسب با مساحت زمین فروشگاه بوده و نسبت عکس با برخی توان‌های فاصله تا فروشگاه دارد. تابع نزولی فاصله می‌تواند به‌صورت توانی از فاصله، که معرف کاهش جذابیت است، بیان شود. وقتی توان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، مشتری نزدیک‌ترین فروشگاه را با احتمال "یک" انتخاب می‌کند. بنابراین قانون جاذبه هاف تعمیمی از فرض مجاورت و قاعده‌ای کلی‌تر بوده و به‌عنوان بیشترین مدل مطلوبیت مورد استفاده شناخته شده است [۴۲]. به‌جای فرم چند جمله‌ای، ویلسون [۴۳] و هوجسون [۴۴]تابع فاصله نزولی نمایی و بِل [۴۵] سایر

توابع ریاضی را پیشنهاد کردند. دِرِزنر و دِرِزنر [۴۸-۴۶] و فوترینگام [۴۹ و ۵۰]توزیع‌های مختلف تقاضا را با توابع مطلوبیت یکسان و تصادفی در این مدل تحلیل کردند. مک‌فِیدین [۵۱] مدل انتخاب گسسته را با عنوان لاجیت چندجمله‌ای ابداع کرد. قانون جاذبه به‌طور گسترده در حل مسائل بسیاری از حوزه‌های مختلفی مانند علوم جغرافی (ویلسن [۵۲]و لِو و سِن [۵۳])، برنامه‌ریزی حمل‌ونقل(اوانس [۵۴]، ارلندر و استوارت [۵۵])، بازاریابی (هاف و رولند [۵۶]) و به‌ویژه در مطالعات مکان‌یابی به کار رفته است. به عنوان مثال دِرِزنر و دِرِزنر [۵۷]و اِیسلت و ماریانُو [۵۸]از آن برای تعیین مکان قطب، دِرِزنر و دِرِزنر [۴۲ و ۵۹]در مسئله میانه، هوجسون [۶۰] و اُکِلی و استوربِک [۶۱] در مکان‌یابی روی فضای گسسته، کوکوکایدین و همکاران [۶۲] برای مکان‌یابی تسهیلات رقابتی استفاده کردند.

در این پژوهش، توسعه‌ای از مسئله مکان‌یابی با بارکاری متوازن انجام گرفته است. هدف مسئله، تعیین مکان، تعداد و ظرفیت چندین تسهیل که از نظر مطلوبیت متفاوت هستند برای پاسخگویی به نیاز شبکه‌ای از نقاط تقاضا است.

بر اساس مطالعات به‌عمل آمده، نزدیک‌ترین تحقیق مرتبط در بحث متعادل کردن بار کاری بر اساس فواصل واقعی (تحت شبکه) تحقیقی است که توسط بِرمن و همکاران[۲۲] ارائه شده و در آن روی متعادل‌سازی بدون در نظر گرفتن هزینه‌های مدل مکان‌یابی تمرکز شده است. شبکه نقاط تقاضا مسیری با دو گره روی یک شبکه درختی در نظر گرفته شده است.

انتخاب خدمت‌دهنده توسط مشتری برمبنای نزدیک‌ترین تسهیل موجود انجام گرفته که این موضوع بخصوص در تسهیلات عمومی، که متوازن‌سازی اهمیت بیشتری دارد، چندان واقعی نیست. در نهایت چند الگوریتم ابتکاری و فراابتکاری برای حل مسئله ایجاد شده که هریک در معیار عملکردی *خاصی* کارآیی دارد.

بر این اساس در این مقاله روی بهبود موارد ذکرشده تأکید شده است. هدف مکان‌یابی، به صورت ترکیبی از کاهش هزینه‌های استقرار تسهیلات و حمل و نقل مشتریان در کنار توزیع عادلانه کل تقاضا بین تسهیلات خدمت‌دهنده است. در انتخاب تسهیل توسط هر مشتری تنها نزدیک بودن حائز اهمیت نبوده، بلکه معیارهای مطلوبیت و عدم مطلوبیت مختلف در نظر گرفته شده است. به‌طور کلی، در این پژوهش احتمال انتخاب خدمت‌دهنده به‌صورت تابعی از میزان جذابیت تخمینی هر تسهیل، فاصله و تراکم موجود در آن تعریف شده است. شبکه مشتریان به‌صورت عمومی (و نه لزوما درختی) فرض شده است. الگوریتم‌های حل ابتکاری و دقیق نیز برای حل مسئله پیشنهاد شده که با توجه به نتایج محاسباتی کارآیی خوبی را نشان داده است.

تشریح مسئله

مسئله مکان‌یابی تعدادی تسهیل مشابه را در یک منطقه جغرافیایی با تقاضای معلوم در نظر بگیرید. ظرفیت تسهیلات باید برای پاسخگویی به کل تقاضای مورد انتظار کافی باشد. فرض کنید تکمیل‌نکردن ظرفیت، هزینه‌بر بوده و کل تقاضا باید توسط تسهیلات و به طور "یکنواخت" پوشش یابد. همچنین هر مشتری خواهان دریافت سرویس از "جذاب‌ترین تسهیل" است. مسئله مکان‌یابی، معادل یافتن مکان‌هایی در نظر گرفته می‌شود که علاوه بر کمینه‌سازی هزینه‌های استقرار و جابه‌جایی، حجم تقاضای مشغول‌ترین تسهیل را حداقل کند. چون ظرفیت توسط پرکارترین تسهیل تعیین می‌شود، تسهیلی که با تقاضایی کمتر از پرکارترین آنها مواجه باشد، مقداری ظرفیت استفاده نشده خواهد داشت. بنابراین مکان‌های ایده‌آل، آنهایی هستند که تقاضا بین تسهیلات به صورت *یکسان* پخش شده باشد.

با تخصیص تقاضا به جذاب‌ترین تسهیلات و کوتاه‌ترین فواصل، می‌خواهیم مکان تعدادی نامعلوم از تسهیلات مشابه را جهت تأمین نیازمندی مجموعه مشتریان، طوری تعیین کنیم که حداکثر تقاضایی که هر تسهیل با آن مواجه می‌شود در کنار هزینه‌های مکان‌یابی-تخصیص حداقل شود. با اعمال تغییرات در مدل پایه نام‌گذاری جدیدی برای آن با عنوان "مسئله توازن بر مبنای مدل جاذبه[1]" در نظر می‌گیریم.

مدل جاذبه و اندازه‌گیری جذابیت تسهیل

تحلیل عوامل مربوط به جریان کالا یا سرویس، پیش-بینی حجم تبادلات تجاری بخصوص در سطح بین‌المللی، تأسیس مراکز مراقبت از سلامتی، برنامه‌ریزی حمل و نقل، پیش‌بینی فروش، توزیع ترافیک، مهاجرت و حتی جهت وزش تندباد و به‌طور کلی هریک از انواع جابه‌جایی بین دو

نقطه از جمله مسائلی هستند که می‌توان آنها را به کمک قانون جاذبه مدلسازی و حل کرد.

جذابیت

مدل توصیف رفتار مشتری بهکمک قانون جاذبه، اغلب بر اساس فرمول $G_{ij} = \frac{A_j}{F_{ij}}$ است. G_{ij} میزان جریان از گره i به گره j است که به جذابیت تسهیل j (A_j) بستگی دارد. مفهوم این وزن‌ها بسته به کاربرد مسئله و اهمیت آن‌ها متأثر از مشخصه‌های متفاوتی است. در اینجا $A_j = A_j(a_۱, a_۲, \dots, a_p)$، تابعی از ویژگی‌های تسهیل در نظر گرفته شده است. اختلاف نقاط نیز براساس تابع F_{ij} از فاصله i و j، d_{ij}، محاسبه می‌شود. برای مثال، در مکان‌یابی مراکز خرید برای تخمین جذابیت، می‌توان فاصله تا مراکز، قیمت کالاها، تنوع فروشگاه‌ها، تعداد پارکینگ‌های کافی، میزان امنیت، دسترسی به سیستم حمل و نقل عمومی، وجود کافی‌شاپ یا رستوران، ویژگی-های ظاهری، مارک‌های تجاری مورد علاقه، سرگرمی‌ها و.... را در نظر گرفت[۶۳]. گام‌های زیر برای تخمین جذابیت تسهیلات، بر اساس داده‌های گذشته و روش‌های برآورد، پیشنهاد می‌شود.

(۱) شناسایی معیارهای مؤثر در ارزیابی تسهیلات: بسته به ماهیت مسئله و نوع تسهیل ممکن است معیارها یا پیچیدگی تحلیل آنها متفاوت باشد. $M = \{m_۱, m_۲, \dots, m_L\}$

(۲) تعیین وزن هر معیار: هر معیار ارزیابی از نظر مشتری اهمیت خاصی دارد و ممکن است اهمیت یک معیار در یک چارچوب تصمیم‌گیری بیش از سایرین باشد. از این‌رو می‌توان به کمک روش‌های تعیین وزن، مثل ماتریس مقایسات زوجی یا روش دلفی، اهمیت معیارها را لحاظ کرد. به‌این ترتیب، وزن معیارها $E = (e_۱, \dots, e_L)$ محاسبه می‌شود. e_k وزن kامین معیار (m_k) و $0 < e_k < ۱$ است.

تعیین نمره ارزیابی هر تسهیل برای هر معیار: این گام می‌تواند توسط برنامه‌ریزان یا با تکمیل پرسشنامه توسط مشتریان انجام شود. میانگین نمره داده شده به‌عنوان نمره ارزیابی، A_k، در نظر گرفته می‌شود.

تابع فاصله

عبارتی‌که اغلب برای تابع فاصله مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌صورت توابع چند جمله‌ای، $F_{ij} = {d_{ij}}^{\alpha}$ یانمایی $F_{ij} = e^{-\alpha d_{ij}}$ با پارامتر α نامعلوم است[۵۶]. در تابع چند جمله‌ای احتمال خدمت‌دهنده قرار دادن یک تسهیل (α) بر حسب توانی از فاصله کاهش می‌یابد، درحالی‌که در تابع دوم این احتمال بهصورت نمایی بر حسب فاصله کاهش می‌یابد. α به عنوان تخمینی از میزان دسترس‌پذیری شبکه حمل و نقل یا هموار بودن مسیر و یا زمانی که طول می‌کشد تا مشتری یک واحد از فاصله را طی کند تعریف می‌شود.

محاسبه تابع جاذبه مسئله

تجربه نشان می‌دهد که نتایج تحلیل به انتخاب تابع نزولی حساسیت ندارد [۴۰]. ولی برای تأمین بهتر هدف متعادل‌سازی ظرفیت، با فرض یکسان بودن سایر عوامل در محاسبه جذابیت‌ها این تابع را به‌صورت چندجمله‌ای با $\alpha = ۱$ در نظر گرفته و برای جلوگیری از بی‌نهایت شدن کسر (تسهیلات روی گره‌های شبکه استقرار می‌یابند و d_{ij} برای برخی از نقاط برابر صفر می‌شود)، تابع نهایی با عبارت $F_{ij} = {d_{ij}}^{\alpha} + ۱$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول۲:تخمین جذابیت تسهیلات

	معیار۱ - $e_۱$		معیار۲ - $e_۲$		…	معیار L - e_L		جذابیت تسهیلات A_j
	مشتری ۱	... مشتری n	مشتری ۱	... مشتری n	…	مشتری ۱	... مشتری n	
تسهیل ۱	$E_{11}(s_j)$		$E_{21}(s_j)$			$E_{n1}(s_j)$		$A_1 = e_1E_{11}(s_j) + e_2E_{21}(s_j) + e_LE_{n1}(s_j)$
تسهیل ۲	$E_{12}(s_j)$		$E_{22}(s_j)$			$E_{n2}(s_j)$		$A_2 = e_1E_{12}(s_j) + e_2E_{22}(s_j) + e_LE_{n2}(s_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		
تسهیل m	$E_{1m}(s_j)$		$E_{2m}(s_j)$			$E_{nm}(s_j)$		$A_m = e_1E_{1m}(s_j) + e_2E_{2m}(s_j) + e_LE_{nm}(s_j)$

جدول ۳: پارامترها و متغیرهای تصمیم برای مدل مسئله

مجموعه‌ها و اندیس‌ها		t_{ij}	هزینه هر واحد مسافت بین نقطه i و تسهیل j
$I=\{1,\dots,n\}$	نقاط تقاضا/ مکان‌های کاندید تسهیلات	d_{ij}	کوتاهترین فاصله بین نقطه تقاضای i و مکان تسهیل کاندید j . سایر معیارها: تعداد پیمایش‌ها، زمان یا هزینه سفر
$J=\{1,\dots,m\}$	مجموعه تسهیلات استقرار یافته	α	ضریبی که فاصله بر اساس آن افزایش می‌یابد.
i	اندیس نقاط تقاضا	$A=(A_{ij})_{i,j=1,}$	ماتریس $n \times n$ از جذابیت تسهیلات
j	اندیس تسهیلات	U	یک مقدار بسیار بزرگ (می‌توان آنرا $Max_{i,j}\{d_{ij}\}$ در نظر گرفت.)
پارامترها		**متغیرهای تصمیم**	
n	تعداد نقاط تقاضا		L_{max}= حداکثر ظرفیت موجود بین تسهیلات استقرار یافته
m	حداکثر تعداد تسهیلات برای مکان‌یابی $1 \le m \le n$		$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر تسهیلی در گره } v_j \text{ مستقر شود} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$
f_j	هزینه ثابت استقرار تسهیل روی گره کاندید $j \in J$؛ $f_j > 0$		$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } v_i \text{ به تسهیل } v_j \text{ اختصاص یابد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$
w_i	وزن گره یا نرخ تقاضا در نقطه i		

مدلسازی مسئله

مفروضات مدل

- ✓ فرض اولیه این است که کل تقاضای هر مشتری به طور دقیق توسط یک تسهیل تأمین می‌شود.
- ✓ بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرض می‌شود مکان کاندید برای تسهیلات با نقاط تقاضا یکسان است.
- ✓ احتمال خدمت‌دهنده قرار دادن یک تسهیل، به‌طور مستقیم متناسب با جذابیت تسهیل و به صورت عکس با تابعی جندجمله‌ای از فاصله تا آن مرتبط است.
- ✓ تصمیم‌گیرنده دارای اطلاعات کاملی از گذشته در رابطه با جذابیت تسهیلات از دیدگاه مشتریان است.

نمادگذاری و فرمولەبندی مسئله

با استقرار مشتریان روی گره‌ها و تجسم ارتباط آنها روی کمان‌ها، می‌توان یک گراف غیرجهت‌دارِ متصل تشکیل داد. گراف $G\ (V, E)$ را شامل مجموعه گره‌های V و مجموعه کمان‌های E در نظر بگیرید. مجموعه گره‌های $V=\{v_i \mid i=1,\dots,n\}$ را می‌توان به‌صورت دو مجموعه، نقاط تقاضا I و نقاط کاندید استقرار تسهیلات J، در نظر گرفت. همچنین، هر گره v_i با وزن غیر منفی، w_i (تعداد مشتریان ساکن در v_i)، و هر کمان $(v_i, v_{i'})$ در $E=\{e=(v_i, v_{i'}) \mid i, i'=1,\dots,n\ ;\ i \neq i'\}$ با یک طول مثبت، $d_{ii'}$، مرتبط است. برای هر جفت از گره‌های v_i و $v_{i'}$، $d_{ii'}=d\ (v_i, v_{i'})$ را طول کوتاه‌ترین مسیر در G که v_i را به $v_{i'}$ متصل می‌کند در نظر بگیرید. نسبت مشتریان گره i که تسهیل $j \in J$ را خدمت‌دهنده قرار می-دهد به‌صورت $\frac{A_j/d_{ij}^{\alpha+1}}{\sum_{k\in J} A_k/d_{ik}^{\alpha+1}}$ تعریف می‌شود و چون تقاضای i برابر w_i است، کل تقاضاییکه j سرویس‌دهی می‌کند برابر $\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{A_j/d_{ij}^{\alpha+1}}{\sum_{k\in J} A_k/d_{ik}^{\alpha+1}}$ خواهد بود [۱۴].

مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مسئله به‌صورت زیر است که پارامترها و متغیرهای تصمیم آن در جدول (۳) آمده است:

$$\mathrm{Min}Z_1 = L_{max} \tag{1}$$

$$\mathrm{Min}Z_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=}^{n} t_{ij} d_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \tag{2}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \frac{\frac{A_j}{d_{ij}^{\alpha+1}}}{\sum_{k\in M}\frac{A_k}{d_{ik}^{\alpha+1}}} \cdot y_{ij} \le L_{max} \qquad 1 \le j \le n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le m, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 \qquad 1 \le i \le n\ , \tag{5}$$

$$y_{ij} \le x_j \qquad 1 \le i,j \le n \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_{il} d_{il} \le d_{ij} + U\left(1-x_j\right) \qquad 1 \le i,j \le n, \tag{7}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad 1 \le i,j \le n. \tag{9}$$

تابع هدف (۱) و محدودیت (۳) حداقل‌کردن حداکثر بار کاری را برای متعادل‌کردن تراکم تقاضا تضمین می‌کنند. رابطه (۲) تابع هدف دوم مسئله است که هزینه استقرار تسهیل در j و هزینه جابه‌جایی مشتری i تا آن را مشخص می‌کند. در محدودیت (۳) تقاضای تخصیص یافته به هر تسهیل طبق تابع جذب محاسبه و بیشترین مقدار آن به

عنوان حداکثر تراکم، L_{max}، منظور شده است. محدودیت (۴) تضمین می‌کند که تعداد تسهیلات استقرار یافته از مقدار تعیین‌شده m تجاوز نکند. محدودیت (۵) بیان می‌کند که هر مشتری طبق فرض مسئله تنها به یک تسهیل تخصیص یابد. محدودیت (۶) تضمین می‌کند که v_j نمی‌تواند به v_i سرویس دهد، مگر اینکه تسهیلی در آن مستقر شده باشد. روابط (۸) و (۹) دامنه تغییرات متغیرها را نشان می‌دهند. در نهایت ثابت می‌شود که محدودیت (۷) تضمین می‌کند که هر گره به نزدیک‌ترین تسهیل اختصاص یابد.

مجموعه $J = \{j | x_j = 1\}$ را در نظر بگیرید. به ازای $j \notin J$ چون $x_j = 0$، رابطه (۷) همواره برقرار است؛بر اساس محدودیت (۵)، $y_{ij} = 0$ و بنابراین مجموع باقیمانده در سمت چپ (۷) می‌تواند به‌صورت $\sum_{j\in J} y_{ik} d_{ik}$ نوشته شود.همچنین به‌ازای $j \in J$، رابطه (۷) را می‌توان به صورت $\sum_{k\in J} y_{ik} d_{ik} \le d_{ij}$ (۱۰) نوشت. از محدودیت (۴) می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{k\in J} y_{ik} d_{ik} \ge Min_t\{d_{it}\}$. اگر $y_{ik} > 0$ وجود داشته به طوریکه $d_{ik} \ge Min_t\{d_{it}\}$، آنگاه $\sum_{k\in J} y_{ik} d_{ik} > Min_t\{d_{it}\}$ و رابطه (۱۰) به ازای $d_{ij} = Min_t\{d_{it}\}$ نقض خواهد شد.بنابراین $x_{ik} > 0$ فقط برای d_{ik} مساوی با حداقل مسافت برقرار است.بر اساس مفروضات مسئله، به آسانی می‌توان ثابت کرد که GBELP از جمله مسائل NP-hard به شمار می‌رود. وقتی جذابیت همه تسهیلات برابر و هزینه‌های مکان‌یابی- تخصیص در نظر گرفته نشود، مسئله به مدل ELP تبدیل می‌شود که پیچیدگی آن توسط برمن و همکاران [۱۸] مورد بحث قرار گرفته و بنابراین GBELP، NP-hard است.

دو معیار Z_1 و Z_2، بر اساس واحدهای یکسان اندازه‌گیری نمی‌شوند. بنابراین باید بهنحوی مقیاس‌گذاری شوند که بتوانند به یک واحد مشترک مناسب تبدیل شوند. اگر $(x,y)_{min}$ و $(x,y)_{min}$ بردارهایی در مجموعه محدودیت‌ها باشند (بردارهای موجه) که به‌ترتیب توابع Z_1 و Z_1 را حداقل می‌کنند، آنگاه بر اساس روش وزنی متریک داریم:

$$U(x,y) = \left(\frac{Z_1(x,y) - Z_1(x,y)_{min}}{Z_1(x,y)_{min}}\right)^p \qquad (۱۱)$$

$$V(x,y) = \left(\frac{Z_2(x,y) - Z_2(x,y)_{min}}{Z_2(x,y)_{min}}\right)^p \qquad (۱۲)$$

که درصد انحراف از مقادیر بهینه است و می‌توانند با یک ضریب مناسب وزن‌دهی شوند. بنابراین برای ایجاد تابع هدف مدل با یکدیگر ترکیب می‌شوند و تابع هدف مدل به‌صورت زیر بهدست می‌آید:

$$Z(x,y) = \lambda . U(x,y) + \left(1 - \lambda\right) . V(x,y) \qquad (۱۳)$$

λ وزن اختصاص‌یافته به هر یک از معیارها را تعیین می‌کند.

جدول ۴: الگوریتم ابتکاری

	مقادیر پارامترهای ثابت مسئله داده شده است.
گام ۱:	به ازای همه $i, j \in N$، به کمک یکی از الگوریتم‌های یافتن کوتاه‌ترین مسیر، فواصل میان گره‌ها (ماتریس مسافت) را محاسبه کنید. (ما از الگوریتم دایجسترا که پیچیدگی زمانی کم دارد، استفاده کرده‌ایم).
گام ۲:	به ازای $k=1,\dots,m$ ، تعداد k مکان تصادفی کاندید را روی گره‌های شبکه درنظرگرفته و کوتاه‌ترین فاصله نقاط‌تقاضا تا آن‌گره را بیابید.
گام ۳:	پس از هر تخصیص تقاضا با محاسبه کسر جذابیت تسهیل، $A_j/(d_{ij}^{\alpha}+1)$، و میزان تراکم، δ_j، نتیجه بر تابع فاصله تقسیم و به این صورت معیار انتخاب تسهیل برای هر مشتری مشخص می‌شود.
گام ۴:	با تخصیص همه مشتریان به تسهیلات، ظرفیت تسهیل، هزینه استقرار و حمل و نقل و در نتیجه مقدر تابع هدف به‌ازای هر تخصیص محاسبه و با مقایسه بهترین جواب‌های m حالت جواب بهینه تعیین می‌شود.

رویکردهای حل و مثال عددی

الگوریتم ابتکاری

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد،GBELPاز نوع مسائل NP-hard است. بسته‌های نرم‌افزاری تجاری فقط می‌توانند مثال‌هایی با ابعاد کوچک را به‌طور دقیق حل کنند. برای حل چنین مسائلی در مدت زمان معقول و با کیفیت مناسب، در این بخش به ارائه روش ابتکاری مؤثری که بر اساس ساختار مسئله طراحی شده پرداخته می‌شود. گام‌های طراحی شده بهصورت خلاصه در جدول (۴) آمده است. پیش از تشریح الگوریتم لازم است توضیحی در مورد نحوه تأمین کارآتر *هدف متعادل‌سازی* همزمان با *تخصیص ظرفیت*، در این رویکرد داده شود. فرض می‌کنیم *تراکم جمعیت* از مهم‌ترین عوامل محرک انتخاب مشتریان است. بنابراین جاذبه تسهیل j را می‌توان علاوه بر A_j

مرتبط با عکس تراکم و به‌صورت $T_j = \frac{A_j}{\delta_{j+1}}$ تعریف کرد.

در این معادله δ_j میزان تراکم در تسهیل jاست. عدد ۱ در مخرج کسر برای جلوگیری از ایجاد جاذبه نامحدود وقتی $\delta_j = 0$است. از اینرو، عبارت نهایی تعیین جاذبه تسهیل j به‌صورت $G_{ij} = \frac{A_j}{\delta_{j+۱}}.(d_{ij} + ۱)^{-\alpha}$ خواهد بود.

مثال‌های تصادفی

در این بخش عملکرد الگوریتم‌های ابتکاری و دقیق، با استفاده از مثال‌های تصادفی تولیدشده با ابعاد و پارامترهای متفاوت ارزیابی شده است. ولی با توجه به آنکه مشابه آن تا به‌حال حل نشده، برای اعتبارسنجی الگوریتم نمی‌توان خروجی مدل را با تحقیقات قبل مقایسه کرد،بنابراین با بیان مثال‌هایی به بررسی الگوریتم ارائه‌شده می‌پردازیم.

پارامترهای پایه‌ای برای مسائل تولیدشده عبارتند از:

- پارامتر مقادیر تقاضا ، w_i، که به صورت U(۱۰،۵۰) تولید شده است. نماد U(a,b) به معنای توزیع یکنواخت در بازه [a,b] است.
- دامنه جذابیت تسهیلات، A_j، در بازه ۱ تا ۱۰ قرار دارد.
- مقادیر فواصل موجود بین نقاط شبکه، $d\left(v_i, v_j\right) = d_{ij}$ به‌صورت U(۱،۱۰) تولید شده است.
- هزینه‌های مکان‌یابی و تخصیص، ثابت در نظر گرفته شده و شامل هزینه واحد مسافت هر واحد تقاضا (برای‌همه مشتریان به‌صورت متوسط برابر t_{ij} =۵ = tواحد) و استقرار تسهیلات (۵۰۰= f_j واحد) است.
- در نهایت حداکثر تعداد مجاز برای تسهیلاتکه بسته به مقادیر تعداد نقاط تقاضا عددی بین ۱تا n است.

بدین منظور، ۱۳ مجموعه مسئله و ۳ مثال برای هر یک برای ارزیابی کارآیی رویکردها ایجاد شده است. بنابراین در مجموع، ۳۹ مثال برای پارامترهای پایه مورد آزمون قرار گرفته است. مثال‌ها به دو گروه با مقیاس- کوچک (کمتر از ۳۲ نقطه تقاضا) و با مقیاس متوسط و بزرگ (بیش از ۳۲ نقطه) تقسیم شده‌اند.

حل رویکرد ابتکاری به‌کمک MATLAB ۷.۷.۰ و حل دقیق مدل MILP با استفاده از نرم‌افزار GAMS ۲۳.۶ برنامه‌نویسی شده است و در نهایت خروجی آنها روی مسائل تصادفی، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همه مسائل نمونه‌ای روی یک سیستم با پردازنده ۲ هسته‌ای ۲ گیگا هرتز و حافظه اصلی ۱ گیگا بایت و سیستم عامل ویندوز ۷ حل شده‌اند. جدول (۵) خروجی‌های مدل را ارائه می- کند. بر اساس این نمادگذاری‌ها، نتایج حل مثال‌ها در جداول ۵ و ۶ ارائه شده است.

جدول (۶) مقایسه خروجی الگوریتم پیشنهادی و راه‌حل بهینه گمز برای مثال‌های با مقیاس کوچک است و مقادیر حداکثر بار کاری موجود بین تسهیلات خدمت‌دهنده، تابع هدف، زمان انجام محاسبات و نیز شاخص میانگین اختلاف (GAP_{ave}) را شامل می‌شود.

مقادیر شاخص GAP_{ave} برای هر مجموعه بین ۳.۶۰٪ و ۷.۰۲٪ متغیر است و نشان می‌دهد که رویکرد ارائه‌شده جواب‌های بسیار خوبی برای مسئله تولید می‌کند.

همانطور که دیده می‌شود، در مسائل کوچک، الگوریتم ابتکاری نیاز به زمان حل بیشتری دارد، در حالی‌که رشد ابعاد مسئله منجر به افزایش سریع زمان حل نرم‌افزار گمز شده و حتی در مسائل با ابعاد متوسط قادر به ایجاد جواب بهینه نیست.

به عنوان مثال در مکان‌یابی با ۳۹ مشتری و ۲۰ خدمت‌دهنده پس از ۳۶۰۰۰ ثانیه محاسبات جوابی برای مسئله یافت نشد. از اینرو با افزایش اندازه مثال‌ها دستیابی به راه‌حل دقیق بهدلیل مصرف بیش از اندازه حجم حافظه و زمان CPU امکان‌پذیر نبوده و برای حل مثال‌های ابعاد بزرگ‌تر نیاز به استفاده از الگوریتم ابتکاری داریم.

جدول (۷)، نتایج حل مسائل با مقیاس متوسط و بزرگ به کمک روش ابتکاری است. نکته‌با اهمیت این است که تعداد مشتریان و سرورها تأثیر ناچیزی روی نتایج و زمان محاسباتی الگوریتم ابتکاری دارند.

مقایسه متوسط زمان انجام محاسبات، توابع هدف و به طور خاص حداکثر بار کاری در سطوح متفاوت در شکل- های ۱ و ۲ نمایش داده شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود با تغییر پارامترها و اندازه مسئله، اختلاف مقادیر تابع هدف و حداکثر ظرفیت تسهیلات ناچیز بوده و زمان محاسبات بخصوص برای مسائل بزرگ با استفاده از روش ابتکاری منطقی است که این موضوع مؤثر بودن آنرا تضمین می‌کند.

جدول۵: نمادهای مورد استفاده در حل مثال‌های عددی

نماد	توضیحات		نماد	توضیحات
CT_{H}	شاخص‌های رویکرد ابتکاری	زمان محاسباتی (ثانیه)	$(n) = \|I\|$	تعداد نقاط تقاضا
Z_{H}		مقدار تابع هدف	$(m) = \|J\|$	حداکثر تعداد تسهیلات کاندید
$\mathrm{L}_{\max(\mathrm{H})}$		حداکثر بار کاری تخصیص یافته به تسهیلات		
CT_{E}	شاخص‌های روش دقیق (مثال‌های با ابعاد کوچک)	زمان محاسباتی (ثانیه)	m_{opt}	تعداد تسهیلات بهینه
Z_{E}		مقدار تابع هدف		
$\mathrm{L}_{\max(\mathrm{E})}$		حداکثر بار کاری تخصیص یافته به تسهیلات	GAP_{ave} (%)	$\frac{\text{مقدار بهینه} - \text{مقدار جواب}}{\text{مقدار بهینه}} \times ۱۰۰$

جدول ۶: عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی برای مسائل با مقیاس کوچک t=۵

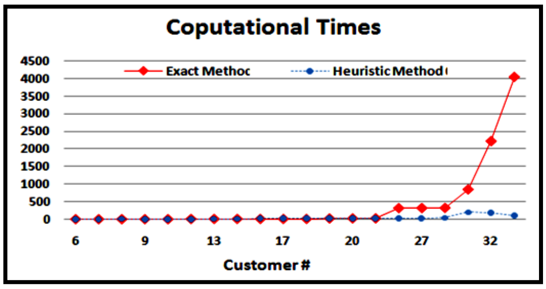
	مقادیر پارامترها						بهترین جواب‌ها							
	n	w_i	m	A_j	f_j	d_{ij}	CT_{H}	Lmax (H)	Z_{H}	m_{opt}	CT_{E}	Lmax (E)	Z_{E}	m_{opt}	GAP_{ave}
#۱	۶	U (۱۰,۵۰)	۱	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۰.۳۱	۱۷۶	۱.۶۹۵	۲	۰	۱۷۶	۱.۰۰۴	۲	۳.۴۳
			۳				۱.۷۲	۱۰۹	۱.۴۹۵		۰	۸۰	۱.۰۰۲		
			۴				۱.۵۱	۸۰	۱.۰۹۵		۰	۸۰	۱.۰۰۲		
#۲	۹	U (۱۰,۵۰)	۱	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۶.۱	۲۴۸	۱.۶۹۱	۳	۰	۲۴۸	۱.۲۴۹	3	۳.۶۱
			۴				۵.۳۹	۱۰۷	۱.۶۸۷		۰.۱	۱۰۲	۱.۱۳۰		
			۷				۵.۴۰	۱۰۲	۱.۶۸۷		۰.۱	۱۰۲	۱.۱۳۰		
#۳	۱۳	U (۱۰,۵۰)	۲	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۵.۸۲	۱۷۸	۱.۰۰۲	۴	۶	۱۷۸	۰.۹۶۸	۴	۵.۷۸
			۶				۶.۷۳	۱۳۱	۰.۹۲۸		۷	۱۱۹	۰.۵۶۹		
			۹				۶.۹۱	۱۱۹	۰.۹۲۸		۷	۱۱۹	۰.۵۶۹		
#۴	۱۷	U (۱۰,۵۰)	۴	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۱۳.۵۴	۱۵۳	۱.۷۱۲	۴	۶	۱۵۳	۱.۱۰۸	۴	۳.۶۰
			۷				۱۵.۰	۱۱۵	۱.۶۹۱		۶.۸	۱۱۵	۱.۵۲۶		
			۱۱				۱۵.۲۰	۱۱۵	۱.۶۹۱		۷.۱	۱۱۵	۱.۵۲۶		
#۵	۲۰	U (۱۰,۵۰)	۴	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۲۶.۷۰	۱۸۵	۱.۰۹۸	۵	۲۰	۱۶۵	۱.۰۷۹	۵	۴.۴۴
			۹				۲۶.۲۹	۱۶۵	۱.۹۴۲		۲۲	۱۶۵	۱.۷۶۴		
			۱۵				۲۷.۲۳	۱۶۵	۱.۸۴۲		۲۳.۱	۱۶۵	۱.۷۶۴		
#۶	۲۷	U (۱۰,۵۰)	۴	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۲۹.۴	۱۶۸	۰.۷۵۳	۶	۳۱۵	۱۶۸	۰.۳۱۸	۶	۷.۰۲
			۱۰				۳۰.۹۴	۱۴۹	۰.۸۱۴		۳۱۷	۱۳۴	۰.۷۷۲		
			۱۳				۳۴.۸	۱۳۴	۰.۵۱۴		۳۲۱	۱۳۴	۰.۷۷۲		
#۷	۳۲	U (۱۰,۵۰)	۴	U (۰,۱)	۵۰۰	U (۱,۱۰)	۱۹۵.۰	۲۵۰	۱.۰۵۵	۷	۸۴۴	۲۴۷	۱.۰۰۵	۷	۴/۸۶
			۱۲				۱۸۳.۱	۲۰۸	۱.۹۹۶		۲۲۱۴	۱۹۸	۱.۸۰۳		
			۱۷				۱۰۶.۷	۱۹۸	۱.۹۹۶		۴۰۳۵	۱۹۸	۱.۸۰۳		

جدول ۷: عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی برای مسائل با مقیاس متوسط و بزرگ t=۵

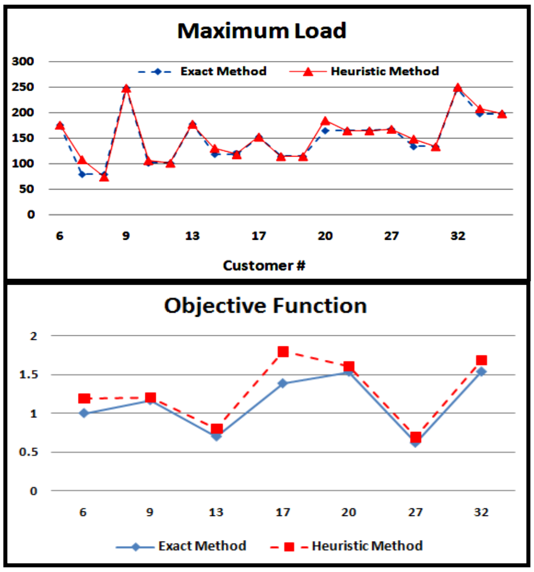
	مقادیر پارامترها						بهترین جواب‌ها								
	n	w_i	m	A_j	f_j	d_{ij}	CT_{H}	Lmax (H)	Z_{H}	m_{opt}	CT_{E}	Lmax (E)	Z_{E}	m_{opt}	GAP_{ave}
#۸	۳۹	U (۱۰,۵۰)	۵	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۲۰۹.۶	۲۴۸.۹	۳.۱۹۸	۶	۱۴.۲۱۹	۲۴۷	۳.۱۶۰	۷	
			۱۲				۲۲۱.۳	۲۰۶.۲	۳.۱۶۰		-	-	-		
			۲۰				۲۳۸.۴	۲۰۶.۲	۳.۱۶۰		-	-	-		
#۹	۴۶	U (۱۰,۵۰)	۸	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۲۱۹.۹	۲۱۴.۹	۴.۱۰۸	۸	-	-	-		
			۱۷				۲۲۶.۳	۲۱۴.۹	۴.۱۰۸		-	-	-		
			۲۷				۲۳۸.۵	۲۱۴.۹	۴.۱۰۸		-	-	-		
#۱۰	۵۵	U (۱۰,۵۰)	۹	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۲۴۶.۴	۲۲۱.۵	۵.۷۱۴	۸	-	-	-		
			۲۰				۲۴۹.۲	۲۱۴.۱	۴.۲۵۱		-	-	-		
			۳۲				۲۵۸.۰	۲۱۴.۱	۴.۹۵۱		-	-	-		
#۱۱	۶۳	U (۱۰,۵۰)	۱۰	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۲۶۵.۵	۳۱۵.۳	۵.۹۹۲	۱۰	-	-	-		
			۲۲				۲۸۱.۸	۲۹۱.۸	۵.۲۰۲		-	-	-		
			۳۵				۲۹۵.۸	۲۸۸.۷	۵.۲۰۲		-	-	-		
#۱۲	۷۵	U (۱۰,۵۰)	۱۰	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۳۰۸.۸	۲۰۰.۶	۶.۰۰۹	۱۲	-	-	-		
			۲۵				۳۱۹.۴	۲۰۰.۶	۵.۵۹۶		-	-	-		
			۴۸				۳۳۴.۰	۲۰۰.۶	۵.۷۹۶		-	-	-		
#۱۳	۸۳	U (۱۰,۵۰)	۱۵	U (۰,۱)	۵۰	U (۱,۱۰)	۳۴۱.۱	۲۸۹.۸	۸.۲۷۸	۱۷	-	-	-		
			۳۲				۳۶۲.۶	۲۴۲.۱	۷.۹۰۲		-	-	-		
			۵۷				۳۷۷.۱	۲۴۲.۱	۸.۰۳۷		-	-	-		

نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی نوع جدیدی از مدل‌های مکان‌یابی، با عنوان متعادل‌سازی بار کاری بین تسهیلات به کمک قانون جاذبه (*GBELP*) پرداخته شده است. مسائل مکان‌یابی از جمله تصمیم‌گیری‌های استراتژیک بوده که تغییر در آن مستلزم هزینه‌های سنگین و زمان طولانی است. بنابراین درنظر گرفتن هدف متناسب با مسئله کاری ضروری است. هدف متعادل‌سازی از جمله اهدافی است که در مکان‌یابی تسهیلات عمومی مثل بیمارستان، فرودگاه، آتش‌نشانی، *ATM*ها و غیره که توزیع عادلانه تقاضای مشتریان بین آنها حائز اهمیت است از جمله اهداف کلیدی به شمار می‌آید. از طرفی، مسائل مکان‌یابی، اغلب براساس فرض مجاورت فرمول‌بندی و حل می‌شوند، در حالی که محققان بر این باورند که مدل جاذبه بهتر و جامع‌تر می‌تواند شرایط واقعی را منعکس کند. بنابراین در این مدل، احتمال انتخاب سرویس‌دهنده علاوه بر کوتاه‌ترین فاصله، بر حسب سایر معیارهای مرتبط با تسهیلات تعریف می‌شود. بدین ترتیب بهترین مکان برای تسهیلات طوری تعیین می‌شود که علاوه بر کمینه-سازی هزینه‌های مکان‌یابی- تخصیص، یکسان‌سازی ظرفیت تسهیلات با در نظر گرفتن معیار انتخاب مناسب



شکل ۱: مقایسه زمان حل روش‌های دقیق و ابتکاری.



شکل ۲: اختلاف میانگین حداکثر بار کاری و مقادیر هدف

تأمین شود. پس از تعیین نحوه تخمین تابع جاذبه، مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای مسئله ارائه و یک الگوریتم بر مبنای ساختار مسئله طراحی شد و برای دستیابی سریع‌تر هدف متعادل‌سازی راهکاری تعبیه شد. الگوریتم پیشنهادی روی مثال‌های تصادفی با ابعاد مختلف آزمون شده و نشان می‌دهد که این رویکرد با میانگین اختلاف تقریبا ۶ درصد و زمان محاسباتی قابل قبول، روشی بسیار کارآ است.

پیشنهاد برای تحقیقات بعدی، بررسی امکان تقسیم تقاضای هر گره بین دو یا چند تسهیل یا در نظر گرفتن سایر معیارهای توازن در مدلسازی مسئله از قبیل حداقل‌کرن واریانس یا دامنه کل تقاضاهای تخصیص‌یافته به تسهیلات است. همچنین بررسی امکان استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری مبتنی بر جمعیت اولیه برای حل مسئله مورد نظر است. در نهایت مهم‌ترین و آشکارترین پیشنهاد پیاده‌سازی مدل در حل مسائل دنیای واقعی است.

مراجع

1- ReVelle, C.S. and Eiselt, H.A. (2005). "Facility Location analysis: A synthesis and survey." *European Journal of Operational Research*, 165, PP. 1–19.

2- Drezner, Z. (1982). "Competitive location strategies for two facilities." *Regional Science & Urban Economics*, Vol. 12, PP. 485–93

3- Ghosh, A. and Rushton, G. (1987). *Spatial analysis and location-allocation models,* Van Nostrand Reinhold Co., NY.

4- Minieka, E. (1977). "The centers and medians of a graph."*Operations Research*, Vol. 25, PP. 641–50.

5- ReVelle, C. (1986). "The maximum capture or sphere of influence problem: hotelling revisited on a network."*Journal of Regional Science*, Vol. 26, PP. 343–57.

6- Francis, R. L., Lowe, T. J., Rayco, M. B. and Tamir, A. (2009). "Aggregation error for location models: survey and analysis."*Annals of Operations Research*, Vol. 167, PP. 171–208.

7- Marsh, M. T. and Schilling, D. A. (1994). "Equity measurement in facility location analysis: A review and framework."*European Journal of Operational Research*, Vol. 74, PP. 1-17.

8- Eiselt, H.A. and Laporte, G. (1995). *Objectives in location problems,* in: Z. Drezner Ed., *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, PP. 151–180, Springer, Berlin.

9- Lorenz MO. Methods of measuring the concentration of wealth. Publications of the American Statistical Association 1905; 9:209–19.

10- Schutz, R. (1951)."On the measurement of income inequality". American Economic Review 41, 107-122.

11- Erkut, E. (1993). Inequality measures for location problems, Location Sci. 1 , 199–217.

12- Mulligan, G.F. (1991). Equality measures and facility location, Papers Regional Sci. 70, 345–365.

13- Hansen, P. and Zheng, M. (1991). An algorithm for the minimum variance point of a network. Operation Research 25, 119–126.

14- Berman, O. and Kaplan, E.H. (1990). Equity maximizingfacility location schemes, Transp. Sci. 24, 137–144.

15- Maimon, O. (1986). The variance equity measure in locational decision theory. Annals of Operations Research, 6, 147–160.

16- Kincaid, R.K. and Maimon, O. (1989). Locating a point of minimum variance on triangular graphs, Transp. Sci. 23, 216–219.

17- Berman, O. (1990). Mean-variance location problems. Transportation Science, 24, 287–293.

18- Tamir, A. (1992). "On the complexity of some classes of location problems." *Transp. Sci.*, Vol. 26, PP. 352–354.

19- Lopez-de-los-Mozos, M. C., Mesa, J.A. (2001). "The maximum absolute deviation measure in location problems on networks."*European J. Oper. Res*. 135, PP. 184–194.

20- Mesaa, J. A., Puertob, J. and Tamir, A. (2003). Improved algorithms for several network location problems with equality measures, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 130, PP. 437 – 448.

21- Drezner, T., Drezner, Z. and Guyseb, J. (2009). "Equitable service by a facility: Minimizing the Gini coefficient, *Journal of Computers & Operations Research*, Vol. 36, PP. 3240 – 3246.

22- Berman, O., Drezner, Z., Tamir, A. and Wesolowsky, G. O. (2009). "Optimal location with equitable loads." Ann Oper Res, Vol. 167, PP. 307–325.

23- Chanta, S., Mayorga, M. E., Kurz, M. E. and McLay, L. A. (2011). "The minimum p-envy location problem: a new model for equitable distribution of emergency resources." *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering*, Volume 1, No. 2, PP. 101-115.

24- Barbati, M., Bruno, G. and Genovese, A. (2011)."An Agent-Based Framework for Solving an Equity Location Problem."*Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 6682, PP. 486-494.

25- Huang, M., Smilowitz, K. and Balcik, B. (2012). "Models for relief routing: Equity, efficiency and efficacy." *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 48, No. 1, PP. 2–18.

26- Kostreva, M. M., Ogryczak, W. and Wierzbicki, A. (2004). "Equitable aggregations and multiple criteria analysis."*European Journal of Operational Research*, Vol. 158, PP. 362–377.

27- Ogryczak,W. (2000). "Inequality measures and equitable approaches to location problems." European *Journal of Operational Research*, Vol. 122, PP. 374-391.

28- Wong, I. A. (2012). "Exploring customer equity and the role of service experience in the casino service encounter." *International Journal of Hospitality Management*, In Press, Corrected Proof.

29- Stevans, L. K. (2012). "Income inequality and economic incentives: Is there an equity–efficiency tradeoff?" *Research in Economics*, Vol. 66, No. 2, PP. 149–160.

30- Shi, J. and Zhou, N. (2012). "A quantitative transportation project investment evaluation approach with both equity and efficiency aspects." *Research in Transportation Economics,* In Press, Corrected Proof.

31- Berman, O. and Krass, D. (2002) *Facility location problems with stochastic demand and congestion: Facility Location: Applications and Theory*, Chapter 11, Z. Drezner and H. Hamacher, Springer-Verlag, Berlin.

32- Surana, S., Godfrey, B., Lakshminarayanan, K., Karp, R. and Stoica, I. (2006). "Load balancing in dynamic structured peer-to-peer systems." *Journal of Performance Evaluation*, Vol. 63, PP. 217–240.

33- Drezner, T. and Drezner, Z. (2006). "Multiple Facilities Location in the Plane Using the Gravity Model."*Journal of Geographical Analysis*, Vol. 38, No. 4, PP. 391–406.

34- Drezner, T. and Drezner, Z. (2007) "Equity Models in Planar Location." *Computational Management Science*, Vol. 4, PP. 1-16.

35- Baron, O., Berman, O., Krass, D. and Wang, Q. (2007). "The equitable location problem on the plane."*European Journal of Operational Research*, Vol. 183, PP. 578–590.

36- Suzuki, A. and Drezner,Z. (2009). "The minimum equitable radius location problem with continuous demand."*European Journal of Operational Research*, Vol. 195, No.1, PP. 17-30.

37- Puerto, J., Ricca, F. and Scozzari,A. (2009). “Extensive facility location problems on networks with equity measures.”*Journal of Discrete Applied Mathematics*, Vol. 157, PP. 1069–1085.

38- Burkey, M.L., Bhadury, J.and Eiselt, H.A. June (2012). A location-based comparison of health care services in four U.S. states with efficiency and equity, Socio-Economic Planning Sciences, Volume 46, Issue 2, Pages 157–163.

39- Reilly, WJ. (1931). *The law of retail gravitation*, New York, NY: Knickerbocker Press.

40- Huff, D. (1964). “Defining and estimating a trade area.”*Journal of Marketing*, Vol. 28, PP. 34–8.

41- Huff, D. (1966). “A programmed solution for approximating optimum retail location.”*Land Economics*, Vol. 42, PP. 293-303.

42- Drezner, T. and Drezner, Z. (2007). “The gravity p-median model.”*European Journal of Operational Research*, Vol. 179, PP. 1239–51.

43- Wilson, A. G. (1976). *Retailers’ Profits and Consumers’ Welfare in a Spatial Interaction Shopping Model, In Theory and Practice in Regional Science*, PP. 42–59.

44- Hodgson, J. (1981). “A location–allocation model maximizing consumers’ welfare.” *regional studie*, Vol. 15, PP. 493–506

45- Bell, D. R., Ho, T.-H. and Tang, C. S. (1998). “Determining Where to Shop: Fixed and Variable Costs of Shopping.” *Journal of Marketing Research*, Vol. 35, PP. 352–70.

46- Drezner, T. (1994). “Locating a Single New Facility Among Existing Unequally Attractive Facilities.” *Journal of Regional Science*, Vol. 34, PP. 237–52.

47- Drezner, T. (1995a). *Competitive Facility Location in the Plane*, In: Facility Location: A Survey of Applications and Methods, 283–300, edited by Z. Drezner, Springer, New York.

48- Drezner, T. and Drezner, Z. (1996). “Competitive Facilities: Market Share and Location with Random Utility.” *Journal of Regional Science*, Vol. 36, PP. 1–15.

49- Fotheringham, A. S. (1983). “A New Set of Spatial Interaction Models: The Theory of Competing Destinations.’’ *Environment and Planning*, Vol. 15, PP. 15–36.

50- Fotheringham, A. (1986). "‘Modeling Hierarchical Destination Choice.” *Environment & Planning*, Vol. 18, PP. 401–18

51- McFadden, D. (1974). *Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behaviour*, Zarembka P. (ed.), Frontiers in Econometrics, Academic Press, New York.

52- Wilson A. G. (1967). “A statistical theory of spatial distribution models.”*Transportation Research*, Vol. 1, PP. 253–69.

53- Lowe, J.M. and Sen, A. (1996). “Gravity model applications in health planning: analyses of an urban hospital market.” *Journal of Regional Science*, Vol. 36, PP> 437–462.

54- Evans, S.P. (1976). “Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment.”*Transportation Research*, Vol. 10, PP. 37–57.

55- Erlander, S. and Stewart, N.F. (1990). “The gravity model in transportation analysis – theory and extensions.” VSP, Utrecht, The Netherlands.

56- Huff, D. and Rowland, T. (1984). "Measuring the Congruence of a Trading Area."*J. of Marketing*, Vol. 48, No. 4, PP. 68-74.

57- Drezner, T. and Drezner, Z. (2001).‘‘A Note on Applying the Gravity Rule to the Airline Hub Problem.”*Journal of Regional Science,* 41, 67–73

58- Eiselt, H.A. and Marianov, V.(1978). “A conditional p-hub location problem with attraction functions.” *Computers & Operations Research*, Vol. 36, PP. 3128 - 3135

59- Drezner, T. and Drezner, Z. (1978). “Multiple facilities location in the plane using the gravity model.”*Geographical Analysis*, Vol. 38, PP.391–406.

60- Hodgson, M. J. (1978). “Towards More Realistic Allocation in Location–Allocation Models: An Interaction Approach.” *Environment and Planning*, Vol. 10, PP. 1273–85.

61- O’Kelly, M. E. and Storbeck, J. E. (1984). “Hierarchical Location Models with Probabilistic Allocation.”*Regional Studies*, Vol. 18, PP.121–29.

62- Kucukaydin, H., Aras, N. and Altınel, I. K. (2011). “Competitive facility location problem with attractiveness adjustment of the follower: A bilevel programming model and its solution.” *European Journal of Operational Research*, Vol 208, No. 3, PP. 206-203.

63- Drezner, T. (2006) “Derived attractiveness of shopping malls.” *J. of Management Mathematics*, Vol. 17, PP. 349–358.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1- GBELP: Gravity-Based Equitable Load Problem
2- An Agent-Based Framework