تصمیمات قیمت گذاری و موجودی کالاهای مکمل فساد پذیر

عطااله طالعی‌زاده *[1] و معصومه سادات بابائی[2]

[1] استادیار دانشکده مهندسی صنایع- پردیس دانشکده‌های فنی ـ دانشگاه تهران

[2] دانشجوی کارشناسی ارشد- دانشگاه آزاد - واحد تهران جنوب

(تاریخ دریافت ۹۲/۹/۱۶، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۲/۱۲/۱۱، تاریخ تصویب ۹۳/۱/۲۳)

چکیده

در این تحقیق، دو مدل برای تصمیمات موجودی و قیمت‌گذاری کالاهای مکمل با و بدون فرض فسادپذیری کالاها توسعه داده شده است. در هر دو مدل فرض شده است که تابع تقاضای هر کالا، به قیمت خود کالا و قیمت کالای دیگر وابسته است. هدف از این تحقیق، بیشینه‌سازی سود کل سیستم یکپارچه است؛ به طوری که مقادیر بهینه قیمت هر کالا، مقدار سفارش‌دهی و طول دوره تعیین شود. با استفاده از دو قضیه مقعر بودن مشروط هر دو تابع سود، اثبات و برای نشان دادن کاربرد مدل‌های ارائه شده دو مثال عددی ارائه می‌شود. سپس آنالیز حساسیت نیز روی پارامتر درجه مکملی برای هر دو مدل انجام می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: قیمت‌گذاری، موجودی، مقدار سفارش اقتصادی، کالاهای مکمل، فسادپذیری

مقدمه

از آنجایی که قیمت‌گذاری به عنوان یکی از ابزار مهم بیشینه‌سازی سود شناخته شده است، تعدادی از نویسندگان، مقاله‌های خود را روی تصمیم‌های قیمت‌گذاری تک‌کالایی یا چندکالایی در سیستم موجودی و قیمت‌گذاری یکپارچه به چاپ رسانده‌اند. اما تعداد کمی از آنها در این زمینه به بررسی کالاهای مکمل پرداخته‌اند. کالاهای مکمل، کالاهایی هستند که مصرف یکی وابسته به مصرف دیگری است که توپ تنیس و راکت، چای و شکر یا قند و برخی از قطعات کامپیوتری مثال‌هایی از این نوع کالاها هستند. در مورد این کالاها، مصرف‌کننده اغلب آنها را به طور همزمان مصرف می‌کند. از آنجایی که میزان وابستگی کالاها به یکدیگر با هم متفاوت است، هر چقدر این میزان وابستگی، بیشتر باشد، احتمال اینکه مصرف‌کننده آنها را با هم خریداری و مصرف کند، بیشتر است. همچنین تأثیرپذیری تقاضای آنها از یکدیگر نیز بیشتر خواهد بود.

بعضی از نویسندگان از جمله سون [1]، وی و همکاران [2] نیز صرف نظر از اینکه آیا سیاست قیمت‌گذاری در عرصه مدیریت سهام یا مدیریت زنجیره تأمین کاربرد دارد، آن را در عملیات روزانه صنایع برای به دست آوردن تقاضا و کنترل تولید و توزیع محصولات و سطح سرویس به کار بردند. وقتی دو کالا مکمل هستند، فروشنده با پدیده تقاطع فروش[1] مواجه است و خریدار آنها را با هم خریداری می‌کند. بنابراین تعیین مقادیر بهینه مقدار سفارش و قیمت فروش از هر کالاT می‌تواند به طور قابل توجهی سطح سود را افزایش دهد. ژانگ و همکاران [3]، یک سیستم موجودی دو محصولی را در نظر گرفتند که به دلیل پدیده تقاطع فروش، تقاضای یک محصول فرعی به تقاضای محصول اصلی وابسته است. آنها فرض کردند محصول اصلی می‌تواند کمبود پس‌افت جزئی[2] داشته باشد، ولی تقاضای محصول فرعی بدون کمبود است و دوره سفارش محصول اصلی، مضرب صحیحی از دوره سفارش محصول فرعی است. همچنین آنها [4] یک سیستم موجودی چندکالایی را در نظر گرفتند و نشان دادند که به دلیل پدیده تقاطع فروش، ممکن است تقاضاها برای محصولات فرعی توسط فروش محصول اصلی افزایش پیدا کند و یا با تقاضاهای برآورده نشده محصول اصلی، کاهش یابد. پس باید یک سیاست موجودی مشترک با در نظر گرفتن همبستگی محصولات دنبال شود. آنها یک مدل بازپرسازی همزمان[3] با کمبود پس‌افت جزیی و تقاضای همبسته توسعه دادند و برای حل مدل، یک الگوریتم ابتکاری با بازپرسازی محصولات فرعی ارائه کردند. ماخوپادهای و همکاران [5]، یک بازار انحصار دوگانه را در نظر گرفتند که در آن دو شرکت مختلف کالاهای مکمل را پیشنهاد می‌کنند. هر شرکت اطلاعات پیش‌بینی شده خصوصی درباره تقاضای نامعلوم بازار دارد

* نویسنده مسئول: تلفن: ۸۲۰۸۴۴۸۶، فاکس: ۸۸۰۱۳۱۰۲، Email: taleizadeh@ut.ac.ir

و تصمیم می‌گیرد که آیا آن را به شرکت دیگر اطلاع‌رسانی کند یا خیر.

برخی از نویسندگان، مدل مقدار سفارش اقتصادی را برای کالاهای فسادپذیر توسعه دادند. آباد [۶]، سیاست‌های میزان تولید و قیمت‌گذاری بهینه را در یک مدل مقدار سفارش اقتصادی برای کالاهای فسادپذیر با پس‌افت جزیی توسعه داد. گورتلر [۷]، کالاهای مکمل را در نظر گرفت و فرض کرد وقتی مصرف‌کننده تصمیم می‌گیرد کالای اصلی را خریداری کند و تقاضایش برای کالای مکمل ناچیز باشد، در این حالت برای شرکت‌ها مطلوب است که کالاهای مکمل خود را نگهداری کنند. لی [۸]، کالاهای مکملی را در نظر گرفت که توسط دو تولیدکننده جداگانه تولید می‌شوند. او تأثیر ریسک‌گریزی[۴] تولیدکننده‌ها را روی تولید بررسی کرد. بیلوتکاچ [۹] نیز مسئله قیمت‌گذاری و انتخاب کیفیت را برای کالاهای مکمل مطالعه کرد. بعد از او لیراس و همکاران [۱۰]، کالاهای مکمل را در نظر گرفته و فرض کردند که هر شرکت می‌تواند با پرداخت یک هزینه اضافی به بازار دیگری وارد شود. آنها رقابت بین دو شرکت را مدل کرده و نشان دادند که هماهنگی می‌تواند رقابتی باشد و چنین هماهنگی نیز می‌تواند در تعادل رخ دهد. وی و همکاران [۱۱]، یک زنجیره تأمین را با دو تولیدکننده و یک خرده‌فروش و دو کالای مکمل در نظر گرفتند و پنج مدل قیمت‌گذاری با تصمیمات نامتمرکز را کشف کردند.

شوندی و همکاران [۱۲]، یک مدل موجودی و قیمت‌گذاری چندکالایی برای کالاهای فسادپذیر ارائه دادند که در آن کالاها ممکن است جانشین، مکمل و یا مستقل از هم باشند. هدف مدل، تصمیم‌گیری روی قیمت‌ها و نیز تصمیمات موجودی و تولید در سفارش برای بیشینه‌سازی سود کل است. مدل این تحقیق، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی است که یک الگوریتم ژنتیک برای حل آن توسعه داده شده است. همچنین آنها مدل قیمت‌گذاری و میزان تولید آباد [۱۳] را با در نظر گرفتن کالاهای چندگانه توسعه داده و یک مدل موجودی و قیمت‌گذاری چندکالایی جدید برای کالاهای فسادپذیر ارائه دادند که کالاها ممکن است مکمل، جانشین و یا مستقل از هم باشند. هدف آنها بهینه‌سازی قیمت کالاها و مقدار تولید است، به نحوی که سود کل بیشینه شود. مایتی و مایتی [۱۴]، تولید بهینه را برای یک سیستم کنترل موجودی چندکالایی فاسدشدنی با محدودیت منبع برای کالاهای مکمل یا جانشین توسعه دادند. در این تحقیق نرخ تولید و سقف موجودی متغیر تصمیم هستند. همچنین نرخ فسادپذیری هر کالا وابسته یا ثابت و تقاضا وابسته به موجودی است و کمبود در موجودی مجاز نیست.

در این مقاله، دو مدل برای تصمیمات موجودی و قیمت‌گذاری دو کالای مکمل با و بدون فرض فسادپذیری در یک مدل مقدار سفارش اقتصادی توسعه داده شده است. چارچوب مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. تعریف مسئله در بخش ۲ و مدل‌سازی ریاضی در بخش ۳ آورده شده است. در بخش ۴ مثال عددی و در بخش ۵ نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

تعریف مسئله

بازاری را در نظر بگیرید که در آن خرده‌فروش دو کالای مکمل (مانند توپ و راکت تنیس، برخی از قطعات کامپیوتری، چای و قند) را به خریداران عرضه می‌کند.

در جدول (۱) یک دسته‌بندی از مقالاتی که در این بخش مورد بررسی قرار گرفته، ارائه شده است.

در مورد دو کالای مکمل بازار پیش‌بینی می‌کند که وقتی تقاضای یک کالا افزایش یابد، تقاضا برای کالای مکمل نیز افزایش می‌یابد و بر عکس. همچنین تقاضا برای هر کالای مکمل، متأثر از قیمت خود کالا و قیمت کالای دیگر است، به طوری که اگر قیمت یکی از آنها افزایش یابد، تقاضای کالای مکمل کاهش می‌یابد و بر عکس. به طور حتم درجه مکملی دو کالا که برای آن مقداری بین ۰ و ۱ در نظر گرفته شده است، اثر عمده‌ای روی قیمت و میزان تقاضای کالاها خواهد داشت. در هر دو مدل، هدف مسئله، تعیین مقادیر بهینه قیمت‌های فروش، مقدار بهینه سفارش از هر کالا و طول دوره موجودی است، به طوری که تابع سود بیشینه شود. ما فرض می‌کنیم که مدت تحویل کالا صفر است و کمبود در موجودی مجاز نیست (شکل (۱) را ببینید). سپس با افزودن فرض فسادپذیری کالاها، سطح موجودی دو کالا بدون کمبود با سیاست مقدار سفارش اقتصادی مانند شکل (۲) خواهد بود. همان طور که در این شکل دیده می‌شود، با گذشت زمان به دلیل فاسد شدن کالاها، سطح موجودی نسبت به زمانی که کالاها فسادناپذیر هستند، پایین‌تر است.

جدول ۱: طبقه‌بندی مقالات

شماره مقاله	متغیر تصمیم				نوع مدل		نوع کالاها		رابطه‌ی کالاها	
	سایر	طول سیکل	مقدارسفارش	قیمت	غیرقطعی	قطعی	فسادناپذیر	فسادپذیر	جانشین	مکمل
[3]	*	*	*			*	*			*
[4]	*	*			*		*			
[5]				*	*		*			*
[7]				*						*
[8]	*						*			*
[9]				*						*
[10]	*						*			*
[11]				*			*			*
[12]				*	*			*	*	*
[14]	*				*			*	*	*
شکاف تحقیقاتی		*	*	*		*	*	*		*

برای مدل‌سازی مسئله در دست، پارامترها و متغیرهای تصمیم به کاربرده شده به ازای $i=1,2$ عبارتند از:

متغیرهای تصمیم

T طول دوره سفارش

p_i قیمت فروش کالای iام

Q_i مقدار سفارش از کالای iام

پارامترها

A_i هزینه ثابت سفارش‌دهی کالای iام

a مبنای تقاضا (میزان تقاضا به ازای قیمت صفر)

b حساسیت قیمتی

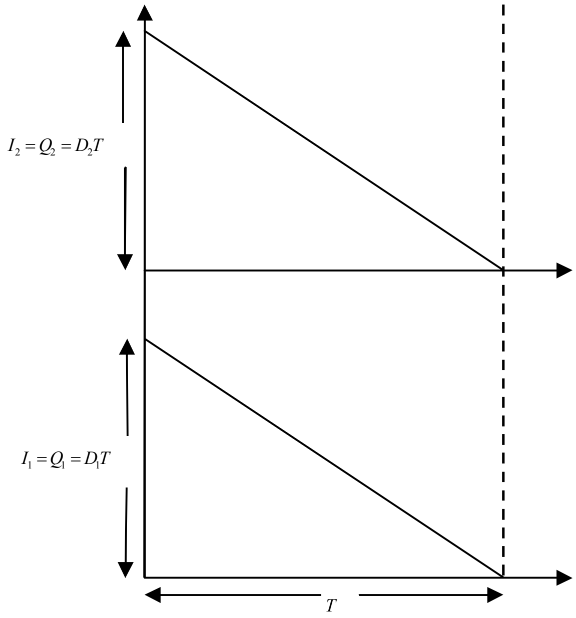
h_i هزینه نگهداری از کالای iام در واحد زمان

c_i هزینه خرید کالای iام

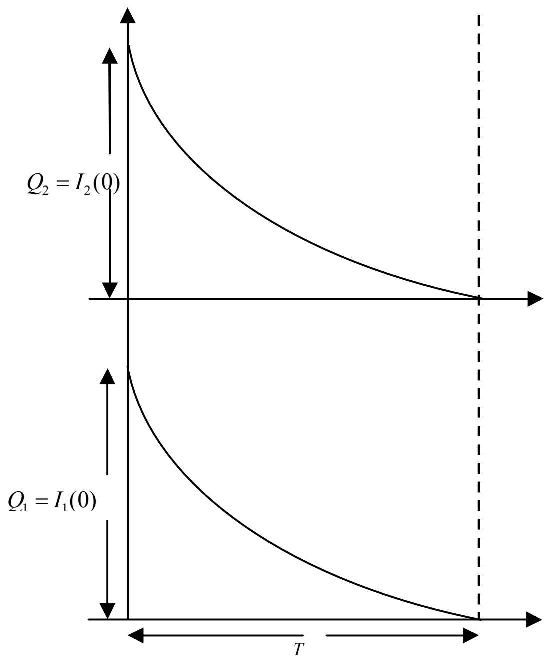
$c_i^{'}$ هزینه هر واحد کالای فاسد شده از نوع i ام

g نرخ فسادپذیری هر دو کالا

θ درجه مکملی بین دو کالا $(0 \le \theta \le 1)$



شکل ۱: سطح موجودی دو کالا بدون کمبود با سیاست مقدار سفارش اقتصادی



شکل ۲: سطح موجودی دو کالا بدون کمبود با فرض فسادپذیر بودن کالاها

مدل‌سازی ریاضی

بدون فرض فسادپذیری

توابع تقاضای برای دو کالای ۱ و ۲ که مکمل هستند، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۵]:

$$D_1(p_1, p_2) = a - bp_1 - b\theta p_2 \quad (۱)$$

$$D_2(p_1, p_2) = a - bp_2 - b\theta p_1 \quad (۲)$$

ما فرض می‌کنیم که همه پارامترهای a,bوθ نامنفی هستند. از آنجایی که خرده‌فروش تمایل دارد مقادیر بهینه قیمت‌های فروش و میزان سفارش‌دهی از هر کالا را تعیین کند، مدل موجودی مقدار سفارش اقتصادی کلاسیک را به کار می‌بریم. از آنجایی که تابع سود مدل مقدار سفارش اقتصادی تک کالایی، به صورت زیر است:

$$\pi(T, p) = (p - c)D(p) - \left(\frac{A}{T} + \frac{hTD(p)}{2}\right)$$

بنابراین برای این مسئله تابع سود به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\pi_C(T, p_1, p_2) = \\ (p_1 - c_1)D_1(p_1, p_2) + (p_2 - c_2)D_2(p_1, p_2) \\ -\left(\frac{A_1 + A_2}{T} + T\left(\frac{h_1D_1(p_1, p_2) + h_2D_2(p_1, p_2)}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(۳)

برای بهینه‌سازی این تابع قضیه زیر را به کار می‌بریم:

قضیه۱. $\pi_C(T, p_1, p_2)$ مقعر است اگر $A_1 + A_2 > \frac{Tb}{2}\begin{bmatrix} Th_1(p_1 + p_2\theta) + Th_2(p_2 + p_1\theta) \\ +4\theta p_1p_2 - 2(p_1^2 + p_2^2) \end{bmatrix}$.

برهان. $\pi_C(T, p_1, p_2)$ اکیدا مقعر است اگر $X \times H \times X^T = \begin{bmatrix} T & p_1 & p_2 \end{bmatrix} \times H \times \begin{bmatrix} T & p_1 & p_2 \end{bmatrix}^T < 0$.

که در آن:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial T \partial p_1} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial T \partial p_1} \\ \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_1 \partial T} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_2 \partial T} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \pi_C}{\partial p_2^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2(A_1 + A_2)}{T^3} & \frac{b(h_1 + \theta h_2)}{2} & \frac{b(h_2 + \theta h_1)}{2} \\ \frac{b(h_1 + \theta h_2)}{2} & -2b & -2\theta b \\ \frac{b(h_2 + \theta h_1)}{2} & -2\theta b & -2b \end{bmatrix} \quad (۴)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} X \times H \times X^T = \\ -\frac{2(A_1 + A_2)}{T} + Tbh_1(p_1 + p_2\theta) \\ + Tbh_2(p_2 + p_1\theta) + 4b\theta p_1p_2 - 2b(p_1^2 + p_2^2) \end{aligned} \quad (۵)$$

پس باید نشان دهیم که:

$$\begin{aligned} X \times H \times X^T = -\frac{2(A_1 + A_2)}{T} + Tbh_1(p_1 + p_2\theta) \\ + Tbh_2(p_2 + p_1\theta) + 4b\theta p_1p_2 - 2b(p_1^2 + p_2^2) < 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

سرانجام تابع سود مقعر است اگر و فقط اگر:

$$A_1 + A_2 > \frac{Tb}{2}\begin{bmatrix} T(h_1(p_1 + p_2\theta) + h_2(p_2 + p_1\theta)) \\ -4\theta p_1p_2 - 2(p_1^2 + p_2^2) \end{bmatrix} \quad (۷)$$

بنابراین قضیه۱ ثابت می‌شود.

حال برای حل مدل، ابتدا از معادله (۳) مشتق مرتبه اول نسبت به T گرفته و با جایگزین کردن $D_1(p_1, p_2)$ و $D_2(p_1, p_2)$ از معادله‌های (۱) و (۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_C(T, p_1, p_2)}{\partial T} = \frac{A_1 + A_2}{T^2} + \frac{h_1(bp_1 - a + b\theta p_2)}{2} \\ + \frac{h_2(bp_2 - a + b\theta p_1)}{2} \end{aligned} \quad (۸)$$

از طرفی مشتق مرتبه اول معادله (۳) نسبت به p_1 و p_2 به ترتیب به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_C(T, p_1, p_2)}{\partial p_1} = \frac{Tb(h_1 + \theta h_2)}{2} + a - 2bp_1 \\ + bc_1 - 2b\theta p_2 + b\theta c_2 \end{aligned} \quad (۹)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_C(T, p_1, p_2)}{\partial p_2} = \frac{Tb(h_2 + \theta h_1)}{2} + a - 2bp_2 \\ + bc_2 - 2b\theta p_1 + b\theta c_1 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

اگر دو معادله (۹) و (۱۰) را مساوی صفر قرار دهیم و با هم حل کنیم، برای p_1 و p_2 مقادیر بهینه زیر به دست می‌آید:

$$p_1^* = \frac{2a + b(1+\theta)(h_1T + 2c_1)}{4b(1+\theta)} \quad (۱۱)$$

$$p_2^* = \frac{2a + b(1+\theta)(h_2 T + 2c_2)}{4b(1+\theta)} \quad (۱۲)$$

با جایگزین کردن معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادله (۸)، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$a_1 T^3 + a_2 T^2 + a_4 = 0 \quad (۱۳)$$

که:

$$a_1 = b(h_1^2 + 2\theta h_1 h_2 + h_2^2) \quad (۱۴)$$

$$a_2 = 2\begin{bmatrix} -a(h_1+h_2) + b(h_1 c_1 + h_2 c_2) \\ +b\theta(h_1 c_2 + h_2 c_1) \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$a_4 = 8(A_1 + A_2) \quad (۱۶)$$

معادله (۱۳) یک چندجمله‌ای درجه سه است که آن را حل می‌کنیم تا مقدار بهینه طول دوره (T) را به دست آوریم. با توجه به علامت $\Delta = -4a_2^3 a_4 - 27a_1^2 a_4^2$، سه حالت ممکن است رخ دهد. اگر $\Delta > 0$، معادله سه ریشه حقیقی دارد، اگر $\Delta = 0$، آنگاه معادله ریشه‌های چندگانه دارد که همه آنها حقیقی هستند و سرانجام اگر $\Delta < 0$، معادله یک ریشه حقیقی و دو ریشه غیرحقیقی خواهد داشت. به این ترتیب روش حل را در دستورالعمل زیر خلاصه می‌کنیم.

قدم اول. با استفاده از معادله‌های (۱۴) تا (۱۶) ضرایب چندجمله‌ای که در معادله (۱۳) نشان داده شده است را محاسبه کنید.

قدم دوم. همه ریشه‌های مثبت معادله (۱۳) را با استفاده از یکی از نرم‌افزارهای ریاضی مانند MATLAB تعیین و به قدم سوم بروید.

قدم سوم. برای همه مقادیر قابل قبول طول دوره که در قدم قبل به دست آمده است، مقادیر (p_1, p_2) را تعیین کنید.

قدم چهارم. برای همه ترکیب‌های (T, p_1, p_2) مقدار سود را محاسبه و همچنین شرط مقعر بودن (قضیه۱) را بررسی کنید. در صورت برقراری شرط، سپس بزرگ‌ترین مقدار تابع سود را انتخاب کرده و متغیرهای تصمیم مربوط به آن، مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم یعنی (T^*, p_1^*, p_2^*) خواهند بود و به گام پنجم بروید. در غیر این صورت به کمک نرم افزارهای تحقیق در عملیات مانند CPLEX، اقدام به حل مدل کنید.

قدم پنجم. مقادیر بهینه میزان سفارش از دو کالای ۱ و ۲ را با استفاده از روابط $Q_1^* = D_1(p_1^*, p_2^*)T^*$ و $Q_2^* = D_2(p_1^*, p_2^*)T^*$ به دست آورید.

با فرض فسادپذیری

در این حالت خرده‌فروش دو کالای مکمل را به خریداران عرضه می‌کند که فسادپذیر هستند. در این مدل نرخ فسادپذیری برای هر دو کالا ثابت فرض شده است. از آنجایی که معادله $\frac{dI(t)}{dt} = -gI(t) - D(P)$ وضعیت موجودی فروشنده را در واحد زمان نشان می‌دهد، بنابراین با شرط $I(T)=0$ وضعیت موجودی کالاهای فسادپذیر به صورت $I(t) = \frac{D(p)}{g}(e^{g(T-t)} - 1)$ خواهد بود. لازم به ذکر است نمودار مربوط به این تابع در شکل شماره (۲) نشان داده شده است. همچنین مقدار سفارش‌دهی از هر کالا مساوی $Q = I(0) = \frac{D(p)}{g}\left(e^{gT} - 1\right)$ است. هزینه کل سیستم در طول دوره T برابر است با مجموع هزینه سفارش‌دهی، هزینه نگهداری و هزینه فسادپذیری مربوط به هر کالا. هزینه نگهداری کالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} h\int_0^T I(t) &= h\int_0^T \frac{D(P)}{g}(e^{g(T-t)} - 1)dt \\ &= \frac{hD(P)}{g^2}(e^{gT} - gT - 1) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

هزینه فاسدشدن کالا نیز به صورت معادله (۱۸) محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} &c'\left(\underbrace{I(0) - D(P)T}_{Deterioration\ Quantity}\right) \\ &= c'\left(\frac{D(P)}{g}(e^{gT} - 1) - D(P)T\right) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

بنابراین تابع هزینه کل به صورت زیر است:

$$TC = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} A + \overbrace{\frac{hD(P)}{g^2}(e^{gT} - gT - 1)}^{Holding\ Cost} \\ \underbrace{+\frac{c'D(P)}{g}(e^{gT} - 1) - c'D(P)T}_{Deterioration\ Cost} \end{bmatrix}$$

$$e^{gT}=1+gT+\frac{(gT)^2}{2}$$
$$\rightarrow$$
$$TC=\frac{1}{T}\left[A+\frac{hD(P)}{2}T^2+\frac{c'D(P)gT^2}{2}\right]$$
$$=\frac{A}{T}+\frac{(h+c'g)D(P)}{2}T^2 \quad (۱۹)$$

توابع تقاضا برای دو کالای مکمل مشابه مدل قبلی به صورت زیر است:

$$D_1(p_1,p_2)=a-bp_1-b\theta p_2 \quad (۲۰)$$

$$D_2(p_1,p_2)=a-bp_2-b\theta p_1 \quad (۲۱)$$

بنابراین برای این مسئله تابع سود به صورت زیر خواهد بود:

$$\pi_C(T,p_1,p_2)=(p_1-c_1)D_1(p_1,p_2)+(p_2-c_2)D_2(p_1,p_2)-\left(\frac{A_1+A_2}{T}+\frac{T(h_1+c_1'g)D_1(p_1,p_2)}{2}+\frac{T(h_2+c_2'g)D_2(p_1,p_2)}{2}\right) \quad (۲۲)$$

برای بهینه‌سازی این تابع، قضیه زیر را به کار می‌بریم:

قضیه۲. $\pi_C(T,p_1,p_2)$ مقعر است اگر

$$A_1+A_2>\frac{Tb}{2}[-4\theta p_1p_2-2(p_1^2+p_2^2)+T(p_1(h_1+\theta h_2)+p_2(h_2+\theta h_1))+Tg(c_1'(p_1+\theta p_2)+c_2'(p_2+\theta p_1))]$$

برهان. $\pi_C(T,p_1,p_2)$ مقعر اکید است، اگر $X\times H\times X^T=\begin{bmatrix}T & p_1 & p_2\end{bmatrix}\times H\times\begin{bmatrix}T & p_1 & p_2\end{bmatrix}^T<0$.

که:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\pi_C}{\partial T^2} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial T\partial p_1} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial T\partial p_1}\\ \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_1\partial T} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_1\partial p_2}\\ \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_2\partial T} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_2\partial p_1} & \frac{\partial^2\pi_C}{\partial p_2^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{2(A_1+A_2)}{T^3} & \frac{b(m+\theta n)}{2} & \frac{b(n+\theta m)}{2}\\ \frac{b(m+\theta n)}{2} & -2b & -2b\theta\\ \frac{b(n+\theta m)}{2} & -2b\theta & -2b\end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

که در آن $m=h_1+c_1'g$ و $n=h_2+c_2'g$. بنابراین داریم:

$$X\times H\times X^T=-\frac{2(A_1+A_2)}{T}-4b\theta p_1p_2-2b(p_1^2+p_2^2)+Tb(p_1(h_1+\theta h_2)+p_2(h_2+\theta h_1))+Tbg(c_1'(p_1+\theta p_2)+c_2'(p_2+\theta p_1)) \quad (۲۴)$$

حال باید نشان دهیم که:

$$X\times H\times X^T=-\frac{2(A_1+A_2)}{T}-2b(p_1^2+p_2^2)+Tb(p_1(h_1+\theta h_2)+p_2(h_2+\theta h_1))-4b\theta p_1p_2+Tbg(c_1'(p_1+\theta p_2)+c_2'(p_2+\theta p_1))<0 \quad (۲۵)$$

سرانجام تابع سود مقعر است اگر و فقط اگر:

$$A_1+A_2>\frac{Tb}{2}[-4\theta p_1p_2-2(p_1^2+p_2^2)+T(p_1(h_1+\theta h_2)+p_2(h_2+\theta h_1))+Tg(c_1'(p_1+\theta p_2)+c_2'(p_2+\theta p_1))] \quad (۲۶)$$

حال برای حل مدل ابتدا از معادله (۲۳) نسبت به T مشتق گرفته و با جایگزین کردن $D_1(p_1,p_2)$ و $D_2(p_1,p_2)$ از معادله‌های (۲۱) و (۲۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial\pi_C(T,p_1,p_2)}{\partial T}=\frac{A_1+A_2}{T^2}+\frac{(h_1+c_1'g)(bp_1-a+b\theta p_2)}{2}+\frac{(h_2+c_2'g)(bp_2-a+b\theta p_1)}{2} \quad (۲۷)$$

از طرفی مشتق مرتبه اول معادله (۲۳) نسبت به p_1 و p_2 به ترتیب به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial \pi_C(T,p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{Tb((h_1+c_1^{'}g)+\theta(h_2+c_2^{'}g))}{2} + a - 2b(p_1+\theta p_2) + b(c_1+\theta c_2) \quad (۲۸)$$

$$\frac{\partial \pi_C(T,p_1,p_2)}{\partial p_2} = \frac{Tb((h_2+c_2^{'}g)+\theta(h_1+c_1^{'}g))}{2} + a - 2b(p_2+\theta p_1) + b(c_2+\theta c_1) \quad (۲۹)$$

اگر دو معادله (۲۹) و (۳۰) را مساوی صفر قرار دهیم و با هم حل کنیم، برای p_1 و p_2 مقادیر بهینه زیر به دست می‌آید:

$$p_1^* = \frac{2a + b(1+\theta)(2c_1 + Th_1 + Tc_1^{'}g)}{4b(1+\theta)} \quad (۳۰)$$

$$p_2^* = \frac{2a + b(1+\theta)(2c_2 + Th_2 + Tc_2^{'}g)}{4b(1+\theta)} \quad (۳۱)$$

با جایگزین کردن معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادله (۸)، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$a_1T^3 + a_2T^2 + a_4 = 0 \quad (۳۲)$$

که در آن:

$$a_1 = b[(h_1^2+h_2^2)+g^2(c_1^{'2}+c_2^{'2})+2c_1^{'}g(h_1+\theta h_2) + 2c_2^{'}g\ (h_2+\theta h_1)+2\theta(h_1h_2+c_1^{'}c_2^{'}g^2)] \quad (۳۳)$$

$$a_2 = -2[(h_1+c_1^{'}g)(a-b(c_1+\theta c_2)) + (h_2+c_2^{'}g)(a-b(c_2+\theta c_1))] \quad (۳۴)$$

$$a_4 = 8(A_1+A_2) \quad (۳۵)$$

طبق توضیحات ذکر شده درباره چندجمله‌ای درجه سه در مدل قبلی، برای به دست آوردن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم، الگوریتم زیر را برای حل مدل پیشنهاد می‌کنیم.

قدم اول. با استفاده از معادله‌های (۳۳) تا (۳۵) ضرایب چندجمله‌ای که در معادله (۳۲) نشان داده شده است را محاسبه کنید.

قدم دوم. همه ریشه‌های مثبت معادله (۳۲) را با استفاده از یکی از نرم‌افزارهای ریاضی مانند MATLAB تعیین و به قدم سوم بروید.

قدم سوم. برای همه مقادیر قابل قبول طول دوره که در قدم قبل به دست آمده است، مقادیر (p_1,p_2) را تعیین کنید.

قدم چهارم. برای همه ترکیب‌های (T,p_1,p_2) مقدار سود را محاسبه کرده و همچنین شرط مقعر بودن (قضیه۲) را بررسی کنید. سپس بزرگ‌ترین مقدار تابع سود را انتخاب کرده و متغیرهای تصمیم مربوط به آن، مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم یعنی (T^*,p_1^*,p_2^*) خواهند بود.

قدم پنجم. مقادیر بهینه میزان سفارش از دو کالای ۱ و ۲ را با استفاده از $Q_1^* = D_1(p_1^*,p_2^*)T^*$ و $Q_2^* = D_2(p_1^*,p_2^*)T^*$ به دست آورید.

مثال عددی

برای نشان دادن قابلیت مدل‌های ارائه شده، به حل دو مثال عددی می‌پردازیم. در هر دو مثال اثر تغییر درجه مکملی دو کالا را روی استراتژی‌های بهینه مطالعه می‌کنیم. در این قسمت $c_1=20, c_2=10,\ c_1^{'}=10,\ c_2^{'}=5,\ a=100,\ b=0.4,$ $A_1=120,\ A_2=100,\ h_1=6,\ h_2=3,$ هستند.

مثال اول: بدون فرض فسادپذیری

برای مقادیر مختلف θ، قدم‌های ارائه‌شده در مدل اول (بدون فرض فسادپذیری) را به کار برده و مقادیر بهینه T، p_1، p_2، Q_1 و Q_2 را تعیین می‌کنیم. این مقادیر در جدول (۲) نشان داده شده است. جدول (۲) نشان می‌دهد که وقتی θ افزایش می‌یابد، مقدار p_1^*، p_2^*، Q_1^*، Q_2^* و $\pi_C^*(T^*,p_1^*,p_2^*)$ کاهش یافته، اما مقدار T^* افزایش می‌یابد و برعکس .

مثال دوم: با فرض فسادپذیری

در این مثال عددی فرض می‌شود که خرده‌فروش، دو کالای مکمل فسادپذیر را به خریداران عرضه می‌کند. برای مقادیر مختلف θ، قدم‌های ارائه‌شده در مدل دوم (با فرض فسادپذیری) را به کار برده و مقادیر بهینه T، p_1، p_2، Q_1 و Q_2 را تعیین می‌کنیم. این مقادیر در جدول (۳) نشان داده شده است. این جدول نشان می‌دهد که وقتی θ افزایش یابد، بنابراین خرده‌فروشی که تمایل دارد کالاهای مکمل را به خریداران عرضه کند، برای کسب سود بیشتر باید کالاهایی با درجه مکملی پایین‌تر را انتخاب کند. با مقایسه دو مثال ارائه‌شده درمی‌یابیم که

برای هر دو استراتژی با و بدون فرض فسادپذیری، روند تغییر مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم یکسان است.

برای نشان دادن میزان تأثیرپذیری قیمت‌های فروش و مقادیر سفارش‌دهی هر کالا از مقدار درجه مکملی دو کالا، به تحلیل حساسیت این متغیرها برای $\theta = 0.5$ در هر دو مدل می‌پردازیم.

در جدول‌های (۴) و (۵)، اثر تغییرات درجه مکملی دو کالا بر مقادیر قیمت‌های فروش و همچنین مقادیر سفارش‌دهی دو کالا نشان داد شده و در شکل‌های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) این تأثیرها رسم شده است. همان طور که از این جدول‌ها و شکل‌ها دیده می‌شود، در هر دو مدل تغییر درجه مکملی روی مقادیر قیمت‌های فروش نسبت به مقادیر سفارش‌دهی تأثیرگذارتر است.

نتیجه‌گیری

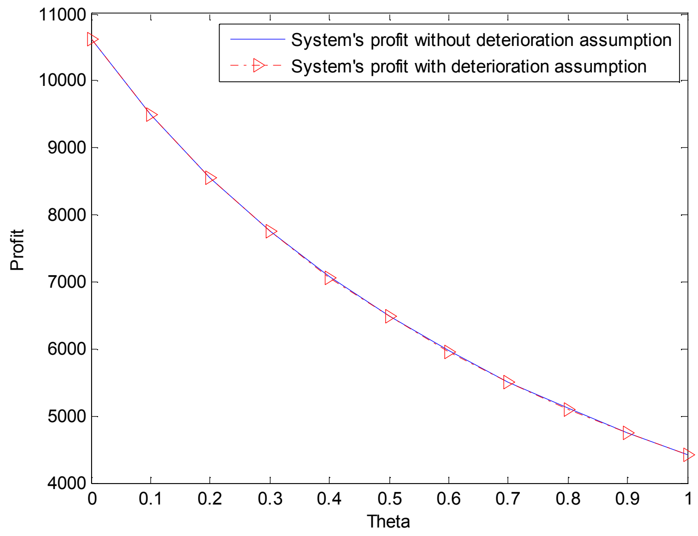
در این مقاله دو مسئله موجودی - قیمت‌گذاری برای کالاهای مکمل بررسی و دو مدل برای تصمیم‌های موجودی و قیمت‌گذاری کالاهای مکمل با دو سناریو با و بدون فرض فسادپذیر بودن کالاها، توسعه داده شد. ما نشان دادیم که در هر دو مدل، هر گاه درجه مکملی دو کالا افزایش یابد، قیمت فروش، مقدار سفارش از هر کالا و همچنین مقدار تابع سود کاهش یافته، اما طول دوره افزایش می‌یابد و بر عکس. بنابراین خرده‌فروش برای کسب سود بیشتر باید کالاهای مکمل با درجه مکملی پایین‌تر را به خریداران عرضه کند. در نظر گرفتن تابع تقاضای تصادفی یا کمبود پس‌افت می‌تواند به عنوان دو موضوع بالقوه برای تحقیقات آینده در نظر گرفته شود.

جدول ۲: مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم به ازای مقادیر مختلف θ برای کالاهای مکمل

θ	Concavity Clause	T	p_1	p_2	Q_1	Q_2	π_C
0	True	1.0292	136.5438	130.7719	46.7087	49.0849	10621
0.1	True	1.0327	125.1854	119.4109	46.6255	48.7723	3.9490
0.2	True	1.0362	115.7210	109.9438	46.5422	48.4579	6.8548
0.3	True	1.0398	107.7135	101.9337	46.4588	48.1415	7.7752
0.4	True	1.0433	100.8507	95.0682	46.3753	47.8233	2.7071
0.5	True	1.0470	94.9038	89.1186	46.2917	47.5031	3.6481
0.6	True	1.0506	89.7010	83.9130	46.2079	47.1809	9.5965
0.7	True	1.0544	85.1110	79.3202	46.1240	46.8567	7.5511
0.8	True	1.0581	81.0316	75.2380	46.0401	46.5305	5.5108
0.9	True	1.0619	77.3824	71.5859	45.9560	46.2022	4.4748
1	True	1.0658	74.0987	68.2993	45.8717	45.8717	9.4424

جدول ۳: مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم به ازای مقادیر مختلف θ برای کالاهای مکمل فسادپذیر

θ	Concavity Clause	T	p_1	p_2	Q_1	Q_2	π_C
0	True	1.0208	136.5567	130.7784	46.5584	48.9299	10618
0.1	True	1.0242	125.1983	119.4174	46.4762	48.6187	9486.7
0.2	True	1.0277	115.7340	109.9503	46.3938	48.3057	8545.1
0.3	True	1.0313	107.7265	101.9402	46.3114	47.9908	7749.2
0.4	True	1.0348	100.8638	95.0748	46.2288	47.6741	7067.7
0.5	True	1.0384	94.9169	89.1251	46.1462	47.3553	6477.9
0.6	True	1.0421	89.7142	83.9196	46.0634	47.0346	5962.4
0.7	True	1.0458	85.1242	79.3268	45.9805	46.7119	5508.2
0.8	True	1.0495	81.0449	75.2447	45.8975	46.3871	5105.1
0.9	True	1.0533	77.3957	71.5926	45.8144	46.0602	4745.0
1	True	1.0571	74.1121	68.3060	45.7312	45.7312	4421.4



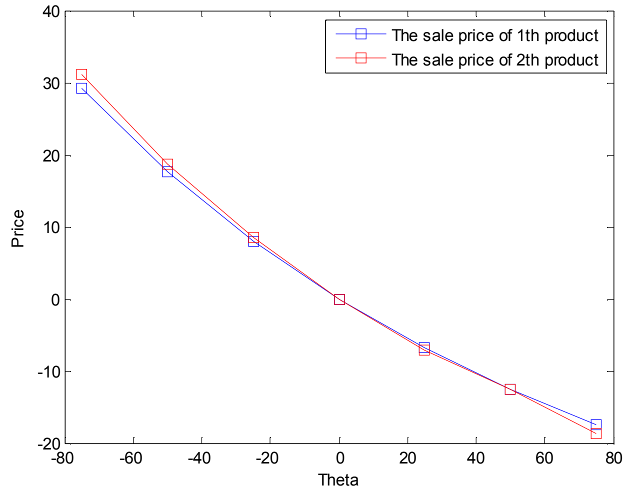
شکل ۳: اثر تغییر درجه مکملی روی سود سیستم با و بدون فرض فسادپذیر

جدول ۴: اثر تغییرات درجه مکملی بر قیمت‌های فروش و مقادیر سفارش‌دهی برای کالاهای فسادناپذیر

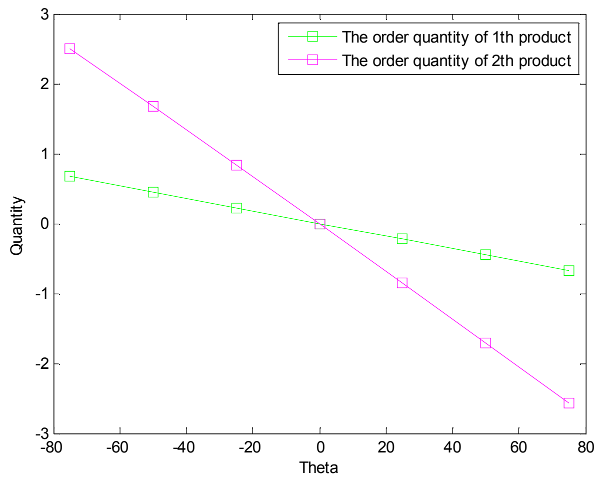
درصد تغییرات						پارامترها
-75	50-	-۲۵	+۲۵	+50	+75	θ
+29.2482	+17.5475	+7.9754	- 6.7473	- 12.5294	- 17.5396	p_1
+31.1581	+18.6941	+8.4969	- 7.1891	- 12.5652	- 18.6899	p_2
+0.6761	+0.4511	+0.2257	- 0.2262	-0.4528	-0.6798	Q_1
+2.5068	+1.6774	+0.8418	- 0.8486	-1.7035	-2.5655	Q_2

جدول ۵: اثر تغییرات درجه مکملی بر قیمت‌های فروش و مقادیر سفارش‌دهی برای کالاهای فسادپذیر

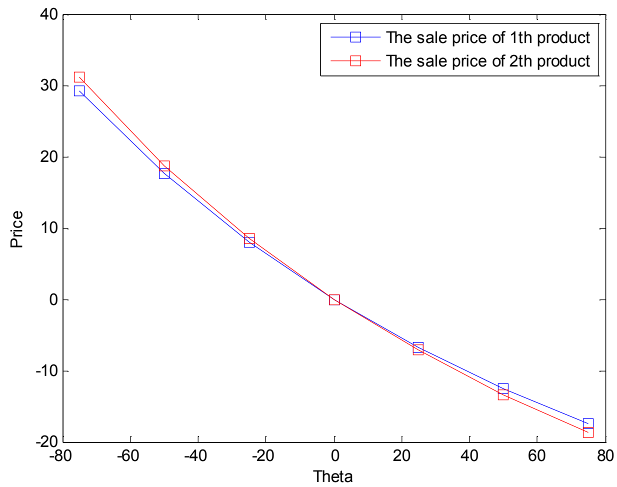
درصد تغییرات						پارامترها
-75	50-	-۲۵	+۲۵	+50	+75	θ
+29.2440	+17.5449	+7.9742	- 6.7462	- 12.5275	- 17.5368	p_1
+31.1559	+18.6927	+8.4964	- 7.1884	- 13.3494	- 18.6883	p_2
+0.6772	+0.4518	+0.2261	- 0.2265	-0.4535	-0.6807	Q_1
+2.5116	+1.6812	+0.8446	- 0.8478	-1.7041	-2.5670	Q_2



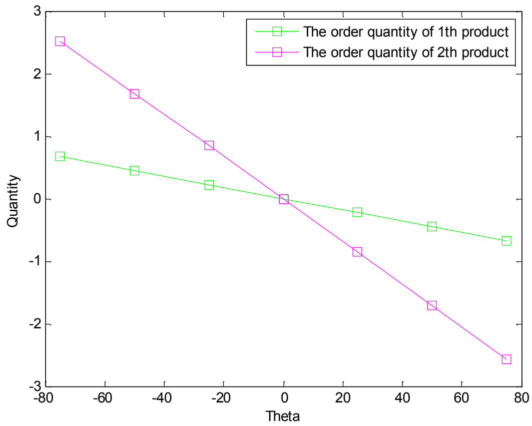
شکل ۴: اثر تغییر درجه مکملی روی قیمت‌های فروش برای کالاهای فسادناپذیر



شکل ۵: اثر تغییر درجه مکملی روی مقادیر سفارش‌دهی برای کالاهای فسادناپذیر



شکل ۶: اثر تغییر درجه مکملی روی قیمت‌های فروش برای کالاهای فسادپذیر



شکل ۷: اثر تغییر درجه مکملی روی مقادیر سفارش‌دهی برای کالاهای فسادپذیر

مراجع

1- Soon, W. (2011). “A review of multi-product pricing models.” *Applied Mathematics and Computation*, 217, 8149–8165.

2- Wei, Y. (2012). “Optimization and optimality of a joint pricing and inventory control policy in periodic-review systems with lost sales.” *OR Spectrum*, 34, 243–271.

3- Zhang, R.-Q., Kaku, I. and Xiao, Y.-Y. (2011). “Deterministic EOQ with partial backordering and correlated demand caused by cross-selling.” *European Journal of Operational Research*, 210, 573-551.

4- Zhang, R., Kaku, I. and Xiao, Y. (2012). “Model and heuristic algorithm of the joint replenishment problem with complete backordering and correlated demand.” *Int. J. Production Economics*, 139, 33–41.

5- Mukhopadhyay, S.K., Yue, X. and Zhu, X. (2011). “A stackelberg model of pricing of complementary goods under information asymmetry.” *International Journal of Production Economics*, 134, 424-433.

6- Abad, P.L. (1996). “Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering.” *Management Science*, 42(8), 1093–1104.

7- Gurtler, O. (2009). “On pricing and protection of complementary products.” *Rev Manag Sci*, 3:209–223.

8- Li, Z. (2010). “Regulating risk-averse producers: The case of complementary products.” *Economics Letters,* 106, 230–233.

9- Bilotkach, V. (2010). “Quality coordination and complementary products.” *Applied Economics.,* 42, 1875–1888.

10- Lleras, J.S. and Miller, N.H. (2010). “The entry incentives of complementary producers: A simple model with implications for antitrust policy.” *Economics Letters*, 110, 147-150.

11- Wei, J., Zhao, J. and Li, Y. (2013). “Pricing decisions for complementary products with firms different market powers.” *European Journal of Operational Research*, 224, 507–519.

12- Shavandi, H., Mahlooji, H. and Nosratian, N.E. (2012). “A constrained multi-product pricing and inventory control problem.” *Applied Soft Computing*, 12, 2454–2461.

13- Abad, P.L. (2003). “Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perish ability, finite production and partial backordering and lost sale.” *European Journal of Operational Research*, 144 (3), 677–685.

14- Maity, K. and Maiti, M. (2009). “Optimal inventory policies for deteriorating complementary and substitute items.” *International Journal of Systems Science*, 267–276.

15- Gupta, S. and Loulou, R. (1998). “Process innovation, product differentiation, and channel structure: strategic incentives in a duopoly.” *Marketing Science*, 17, 301–31.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1- Crros-Selling
2- Partial Backordering
3- Joint Replenishment
4- Risk-Averse