تصمیم‌های متوالی و پویا درمورد قیمت فروش و پذیرش یا رد مشتری با استفاده از فرایند تصمیم مارکوف

مهدی احمدی[۱]، حسن شوندی[۲*]

۱. دانشجوی دکتری دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

۲. دانشیار دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت ۹۳/۰۸/۱۱ ـ تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۴/۰۴/۱۲ ـ تاریخ تصویب ۹۴/۱۰/۰۷)

چکیده

در این پژوهش، نحوهٔ تصمیم‌گیری درمورد قیمت فروش و تخصیص کالا برای فروشندهٔ دارای چندین کلاس مشتری بررسی می‌شود. در هنگام مراجعهٔ هر مشتری، فروشنده باید با توجه به میزان کالای موجود، در زمینهٔ برآورده‌کردن تقاضا یا رد آن تصمیم بگیرد. درصورت برآورده‌کردن تقاضا، بررسی می‌شود که آیا قیمت فروش باید تغییر یابد یا خیر و درصورت نیاز به تغییر، قیمت جدید چگونه از بین مجموعه قیمت‌های ممکن تعیین می‌شود. همچنین، بعد از هر تغییری در میزان موجودی، در زمینهٔ ادامه یا توقف تولید تصمیم‌گیری می‌شود. مسئلهٔ تصمیم‌گیری فروشنده مسئلهٔ تصمیم‌گیری متوالی است که در این پژوهش با رویکرد فرایند تصمیم‌گیری مارکوف مدل می‌شود. با استفاده از فرایند تصمیم‌گیری مارکوف، ساختار سیاست بهینهٔ تصمیم‌گیری برای هر سه تصمیم مطرح‌شده تعیین می‌شود. درنهایت، تأثیر استفاده از این نحوهٔ تصمیم‌گیری بر سود فروشنده از طریق مطالعه‌ای عددی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تخصیص کالا به مشتری، تصمیم‌های متوالی، چندین کلاس مشتری، فرایند تصمیم مارکوف.

مقدمه

یکپارچه‌کردن تصمیم‌های بهینه‌ای که به‌صورت جداگانه اخذ می‌شوند و آثار آن‌ها بر یکدیگر لحاظ نمی‌شود، نوعی بهینه‌سازی در سیستم است. به همین دلیل امروزه تحقیقات فراوانی در زمینهٔ یکپارچه‌دیدن دو یا چند موضوع مرتبط با هم انجام می‌گیرد. یکپارچه‌کردن تصمیم‌های قیمت‌گذاری و تخصیص موجودی یکی از این موضوعات است که در این پژوهش بررسی می‌شود.

برای مثال، شرکتی را درنظر بگیرید که دو کلاس از مشتریان وفادار و موقتی محصول تولیدی آن را می‌خرند. هر مواجهه با کمبود موجب ازدست‌رفتن مشتری در آینده می‌شود. بدیهی است برای سیستم هزینهٔ کمبود در زمینهٔ مشتریان وفادار بیشتر از هزینهٔ مواجهه با کمبود در زمینهٔ مشتریان موقتی است. در کنار این تنوع در کلاس‌های مشتریان، شرکت ممکن است قیمت محصول خود را در دو سطح متفاوت برای مشتریان وفادار و موقتی تنظیم کند. پس این فرصت برای شرکت وجود دارد که با افزایش قیمت در زمان‌هایی که سطح موجودی کالا پایین است، از مزایای قیمت‌گذاری پویا استفاده کند و همچنین در شرایطی که موجودی محدودی دارد با توقف فروش به مشتریان موقتی، مانع از رخداد کمبود برای مشتریان وفادار شود. مک گیل و ون رایزین [۱] اولین کسانی بودند که درمورد یکپارچه‌کردن این دو نوع تصمیم بحث کردند و گفتند: «به یکپارچگی تصمیم‌های قیمت‌گذاری و تخصیص موجودی باید بیشتر توجه شود.» اولین‌بار قیمت‌گذاری و جیره‌بندی به‌صورت یکپارچه در پژوهش گنز و ساوین [۲] برای تسهیلاتی که اجاره داده می‌شدند انجام گرفته است. البته در آن پژوهش برای گروهی از مشتریان فقط از جیره‌بندی استفاده می‌شود و برای گروهی دیگر از مشتریان تنها از قیمت‌گذاری استفاده می‌شود و تفاوت عمدهٔ آن مسئله با مسئلهٔ مورد بررسی در این پژوهش، ماهیت محیط کسب‌وکار است. همچنین در آن پژوهش، جیره‌بندی و قیمت‌گذاری برای تسهیلاتی که اجاره داده می‌شدند به‌کار گرفته شده است، درحالی‌که در این پژوهش این سیاست‌ها درمورد قیمت و جیره‌بندی یک محصول به‌کار می‌رود؛ برای مثال، خودروسازی را درنظر بگیرید که محصولات خود را با

* نویسندهٔ مسئول: تلفن: ۰۲۱-۶۶۱۶۵۷۱۱ فاکس: ۰۲۱-۶۶۰۲۲۷۰۲ Email: shavandi@sharif.edu

دو سازوکار فروش نقدی و فروش اعتباری به فروش می‌رساند. هنگام محدودیت موجودی، شرکت ترجیح می‌دهد محصولات خود را فقط به‌صورت نقدی بفروشد و دلیلی برای فروش اعتباری وجود ندارد. فروش اعتباری نیز درصورتی استفاده می‌شود که سطح موجودی بالا باشد. قیمت محصول در هر دو سازوکار فروش نقدی و اعتباری یکسان است، ولی فروش اعتباری نقش قیمت پایین‌تر را در مسئلهٔ دوقیمتی بازی می‌کند. دلیل این موضوع نیز پرداخت مبلغ در چند قسط در یک دورهٔ زمانی است و با لحاظ‌کردن نرخ بهرهٔ پول حالت فروش اعتباری ارزش بیشتری نسبت به نقدی برای مشتری ایجاد می‌کند. مسئله‌ای که در آن تأمین‌کننده دو گزینهٔ خرید نقدی و اعتباری به خرده‌فروش‌ها ارائه می‌کند در یانگ و همکاران [۳] مطالعه شده است.

پژوهش‌های متعددی در ادبیات نشان می‌دهد در هنگام وجود کلاس‌های مختلف مشتری، سیاست بهینه برای کمینه‌کردن کل هزینه‌های سیستم، جیره‌بندی موجودی است. جیره‌بندی موجودی به‌معنی توقف فروش به مشتریان کم‌اهمیت به‌منظور رزروکردن موجودی برای برآورده‌کردن تقاضای مشتریان مهم‌تر در آینده است. همچنین، امکان تعیین قیمت از بین چندین قیمت مختلف برای محصول، در شاخهٔ قیمت‌گذاری پویا قرار گرفته است. قیمت‌گذاری پویا به‌معنی تغییردادن قیمت به‌صورت پویا با توجه به سطح موجودی است.

به‌کارگیری مشترک قیمت‌گذاری و جیره‌بندی درصورتی مفید است که مجموعهٔ قیمت‌های امکان‌پذیر محدود باشد و کاهش تقاضا از طریق افزایش قیمت با محدودیت روبه‌رو باشد. چنین محدودیت‌هایی به‌دلیل جلوگیری از خدشه‌دارشدن برند شرکت در ذهن مشتریان، قوانین دولتی و... است. شرایط درنظرگرفته‌شده در این پژوهش به شرکت‌هایی مربوط می‌شود که مجموعهٔ محدودی از قیمت‌های امکان‌پذیر را دارند و به همین دلیل در شرایط مواجهه با کمبود، سیاست جیره‌بندی را نیز در کنار قیمت‌گذاری به‌کار می‌گیرند.

مروری بر ادبیات تحقیق

در شاخه‌ای از ادبیات در زمینهٔ تخصیص موجودی، فرانک و همکاران [۴] یک سیستم موجودی مرور دوره‌ای با دو کلاس مشتری درنظر گرفته‌اند. آن‌ها درنهایت یک سیاست (s,k,S) پیشنهاد می‌کنند که s و S تعیین می‌کنند چه زمانی و چه مقدار سفارش داده شود و k مشخص‌کنندهٔ سیاست جیره‌بندی است. به‌طور مشابه دشپاندی و همکاران [۵] یک سیاست (Q,r) را با دو کلاس مشتری مطالعه کرده‌اند و یک سیاست (Q,r,K) پیشنهاد داده‌اند که در آن K آستانه‌ای برای جیره‌بندی است. ارسلان و همکاران [۶] یک سیاست کنترل آستانه‌ای و یک سازوکار برآورده‌کردن سفارش‌های عقب‌افتاده برای یک سیاست مرور پیوسته (Q,r) با زمان تدارک قطعی پیشنهاد داده‌اند.

سیاست‌های جیره‌بندی پویا نیز در دو پژوهش تیونتر و هانیولد [۷] و فادیلوگلو و بولوت [۸] تحلیل شده‌اند. در سیستم‌های جیره‌بندی پویا، سطوح آستانه‌ای که در آن‌ها موجودی برای تقاضای مشتریان مهم‌تر رزرو می‌شود، به زمان باقیمانده تا رسیدن سفارش بعدی بستگی دارد و به همین دلیل این سطوح ثابت نیستند و پویا هستند.

پنج پژوهش ها [۹]، ها [۱۰]، دی وریکورت و همکاران [۱۱]، دی وریکورت و همکاران [۱۲] و هوانگ و ایروانی [۱۳]نیز سیاست‌های جیره‌بندی را برای یک سیستم تولید (نه یک سیستم موجودی) به‌کار گرفته‌اند. در همهٔ این مقالات فرض شده است زمان تولید دارای توزیع نمایی است و ورود مشتری‌ها از فرایند پواسون پیروی می‌کند. تفاوت عمده بین این تحقیقات نحوهٔ برخورد آن‌ها با کمبود است، به‌نحوی‌که بعضی از آن‌ها کمبودها را به‌صورت فروش ازدست‌رفته درنظر می‌گیرند و بعضی دیگر کمبودها را به‌صورت سفارش عقب‌افتاده مدل‌سازی می‌کنند. ساده‌ترین سیاست تخصیص موجودی این است که از جیره‌بندی استفاده نشود و مشتریان براساس زمان مراجعهٔ آن‌ها کالا دریافت کنند. در ادبیات، میزان کارایی هر سیاست را نسبت به این سیاست می‌سنجند. دی‌وری‌کور و همکاران [۱۱] مزایای چندین سیاست مختلف تخصیص موجودی را بررسی کرده‌اند. هرکدام از این سیاست‌ها تعیین می‌کنند که موجودی به چه صورت تخصیص داده شود. در آن پژوهش عملکرد این سیاست‌ها در حالت بهینه‌بودن پارامترهای هر سیاست با یکدیگر مقایسه می‌شوند که به

ایجاد یک دید به‌منظور انتخاب آن‌ها در شرایط مختلف منجر می‌شود. مرور جامعی بر ادبیات جیره‌بندی موجودی در تیونتر و هانیولد [۷] انجام گرفته است.

شاخهٔ دوم از ادبیات به تحقیقاتی مربوط است که تصمیم درمورد قیمت را مطالعه می‌کنند. این پژوهش‌ها نیز فرضیات متفاوتی را در زمینهٔ سیستم موجودی لحاظ می‌کنند. دسته‌ای از این تحقیقات مسئلهٔ روزنامه‌فروش را درنظر می‌گیرند که در آن‌ها افق زمانی به‌صورت یک‌دوره‌ای و موجودی انتهای دوره نیز فاسدشدنی است. در این دسته از پژوهش‌ها علاوه‌بر مقدار سفارش، قیمت فروش نیز به‌صورت هم‌زمان با مقدار سفارش تعیین می‌شود. لی و آتکینز [۱۴] و ژانگ و بل [۱۵] نیز تصمیم قیمت‌گذاری را در مسئلهٔ روزنامه‌فروش بررسی کرده‌اند. در لی و آتکینز [۱۴] تقاضا به‌صورت یک تابع تصادفی از قیمت درنظر گرفته شده است. در ژانگ و بل [۱۵] نیز چندین کلاس مشتری برای مسئلهٔ روزنامه‌فروش درنظر گرفته شده است. پتروزی و دادا [۱۶] مروری بر این مسائل تک‌پریودی که تک‌محصولی نیز هستند انجام گرفته است.

در بیشتر تحقیقات قیمت‌گذاری که به سیستم‌های موجودی مرور دوره‌ای مربوط هستند، فرض می‌شود تقاضا در هر دوره یک تابع تصادفی جمعی یا ضربی از قیمت است. در سیستم‌های مرور پیوسته نیز برای مثال، چن و سیمچی‌لوی [۱۷] فرض می‌کنند زمان بین ورودها و همچنین اندازهٔ سفارش در ورود بعدی به قیمت تنظیم‌شده در آخرین ورود بستگی دارد. گلی‌گو و ون‌رایزین [۱۸] یک مدل موجودی- قیمت‌گذاری بررسی کرده‌اند که در زمان صفر، شرکت به‌اندازهٔ n قلم از یک کالا در اختیار دارد و به‌اندازهٔ t زمان برای فروش آن‌ها دارد. تقاضا در این سیستم با یک فرایند پواسون که دارای نرخ $\lambda(p)$ است مدل‌سازی می‌شود که این نرخ تقاضا نسبت به قیمت p کاهشی است. همچنین، آن‌ها یک مجموعهٔ گسسته را برای قیمت‌ها درنظر گرفته‌اند.

حال معدود پژوهش‌هایی بررسی می‌شود که قیمت‌گذاری و جیره‌بندی را به‌صورت توأم به‌کار گرفته‌اند. در گنز و ساوین [۲] شرکت‌هایی که وسایلی مانند خودرو را اجاره می‌دهند با وجود دو کلاس مشتری مطالعه می‌کنند. شرکت اجاره‌دهنده باید تصمیم بگیرد چگونه جیره‌بندی را در بین مشتریان کلاس یک اجرا کند و نیز چگونه برای مشتریان کلاس دو قیمت‌گذاری کند. در این پژوهش، نویسندگان مشخصات سیاست بهینه را برای مسئلهٔ مورد نظر تعیین کرده‌اند. پژوهش جدیدتری در این زمینه به چو و همکاران [۱۹] مربوط است که یک موجودی اولیه و یک زمان از قبل تعیین‌شده برای فروش آن درنظر می‌گیرد. نویسندگان با استفاده از مدل‌سازی برنامه‌ریزی پویا توانسته‌اند قیمت‌های بهینه و همچنین نحوهٔ بهینهٔ تخصیص موجودی را تعیین کنند. پژوهش‌های احمدی و شوندی [۲۰] احمدی و شوندی [۲۱] از پژوهش‌های پایه‌ای در این زمینه هستند.

مدل‌سازی مسئله با استفاده از فرایند تصمیم مارکوف

یک مدل تصمیم‌های متوالی بدین‌صورت توصیف می‌شود: در یک نقطهٔ مشخص از زمان، فرد تصمیم‌گیر حالت سیستم را مشاهده می‌کند و براساس حالت مشاهده‌شده، تصمیم‌گیرنده یک اقدام را انتخاب می‌کند. این اقدام به دو نتیجه منجر می‌شود: تصمیم‌گیرنده پاداشی فوری دریافت می‌کند یا هزینه‌ای فوری پرداخت می‌کند و سیستم در نقطهٔ زمانی بعدی براساس توزیع احتمالی که متأثر از اقدام انجام‌گرفته است، به یک حالت جدید می‌رود. در نقطهٔ زمانی بعدی، تصمیم‌گیرنده با یک مسئلهٔ مشابه روبه‌رو است، ولی حالا ممکن است سیستم در یک حالت دیگر باشد و نیز ممکن است مجموعهٔ دیگری از اقدام‌های قابل‌انتخاب وجود داشته باشد. در این قسمت، مسئلهٔ مورد نظر در این پژوهش با این مدل تصمیم‌های متوالی مدل‌سازی می‌شود.

یک سیستم تولید را درنظر بگیرید که فقط یک محصول تولید می‌کند و هزینهٔ راه‌اندازی ندارد. همچنین، زمان تولید به‌صورت احتمالی است و از یک تابع توزیع نمایی پیروی می‌کند. فرض می‌شود n کلاس مشتری وجود دارد و تولیدکننده می‌تواند قیمت فروش را در m قیمت مختلف تنظیم کند. ورود مشتریان نیز از فرایند پواسون پیروی می‌کند و نسبت به قیمت حساس است. نمادگذاری زیر برای فرموله‌کردن مسئله در این ابعاد استفاده می‌شود:

n: تعداد کلاس‌های مشتریان

m: تعداد قیمت‌های امکان‌پذیر

c_i: هزینهٔ فروش ازدست‌رفته برای کلاس مشتری i $(i = 1,2,\dots,n)$
فرض می‌کنیم که $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$

μ: نرخ تولید

h: هزینهٔ نگهداری یک واحد کالا در واحد زمان

P: مجموعهٔ قیمت‌های ممکن، $p_1 > \cdots > p_m$

α: نرخ تنزیل

λ_{ij}: نرخ ورود مشتریان کلاس i هنگامی‌که قیمت p_j باشد
فرض می‌کنیم که $\lambda_{ij} < \lambda_{ij'}$ هنگامی‌که $j < j'$ باشد برای $i = 1,2,\dots,n$

λ_j: نرخ ورود کل مشتریان هنگامی‌که قیمت فروش p_j باشد $(j = 1,\dots,m)$ داریم $\lambda_1 < \cdots < \lambda_m$

Λ_{ij}: نرخ ورود کل مشتریانی که هزینهٔ فروش ازدست‌رفتهٔ آن‌ها بزرگ‌تر از c_i است هنگامی‌که قیمت فروش p_j باشد

طبق تعریف: $P = \{p_1,\dots,p_m\}$ و $\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}$ و $\Lambda_{ij} = \sum_{r=1}^{i-1} \lambda_{rj}$

با استناد به پژوهش پیوترمن [۲۲] می‌توان این مسئله را یک مسئلهٔ تصمیم‌گیری متوالی با افق زمانی نامحدود درنظر گرفت که نقاط تصمیم می‌توانند به‌صورت پیوسته در هر نقطه زمانی قرار بگیرند. حالت سیستم، میزان موجودی درنظر گرفته می‌شود و با x نشان داده می‌شود. نقاط تصمیم، زمان‌هایی هستند که یک مشتری وارد می‌شود یا یک تکمیل تولید رخ می‌دهد. اقدام‌ها در هر نقطهٔ تصمیم نیز عبارت‌اند از تصمیم درمورد تولید، قیمت و جیره‌بندی. بعد از هر تکمیل تولید باید تصمیم‌گیرنده درمورد تولید یک واحد بیشتر یا توقف تولید تصمیم بگیرد و همچنین باید قیمت فروش نیز در این نقاط مشخص شود. هر ورود مشتری نیز یک نقطهٔ تصمیم است که در آن باید درمورد پذیرش یا رد آن مشتری تصمیم‌گیری شود. همچنین، درصورتی‌که این تصمیم موجب تغییر در سطح موجودی شود، باید درمورد قیمت جدید نیز تصمیم‌گیری شود. پاداش‌ها در این سیستم عبارت‌اند از هزینهٔ فروش ازدست‌رفته، هزینهٔ نگهداری موجودی و درآمدهای فروش که آخرین مورد مثبت و دو مورد اول منفی هستند. درمورد احتمالات انتقال نیز که جزئی از هر فرایند تصمیم مارکوف است، در ادامه بعد از تبدیل با استفاده از تکنیک یکسان‌سازی توضیح داده می‌شود.

با استناد به پیوترمن [۲۲] این مسئلهٔ تصمیم‌گیری متوالی دارای ویژگی‌های فرایند مارکوف است و یک فرایند تصمیم مارکوف است. به‌علاوه، این فرایند یک فرایند تصمیم شبه‌مارکوف است، زیرا زمان بین نقاط تصمیم تصادفی است. توزیع زمان بین نقاط تصمیم نیز یک متغیر تصادفی نمایی است. این زمان، کمینهٔ چند متغیر تصادفی نمایی است که عبارت‌اند از زمان تولید- اگر تولید متوقف نباشد- و ورود یک مشتری از هر کلاسی از مشتریان. درنتیجه، نوع خاصی از فرایندهای تصمیم شبه‌مارکوف وجود دارد که زمان بین نقاط تصمیم آن نمایی است و به آن فرایند تصمیم مارکوف با زمان پیوسته گفته می‌شود. در اینجا از تکنیک مفید یکسان‌سازی استفاده می‌شود که لیپمن [۲۳] برای مدل‌سازی این فرایندها معرفی کرده است.

در تکنیک یکسان‌سازی، زمان بین نقاط تصمیم یکسان فرض می‌شوند، به‌طوری‌که زمان بین نقاط تصمیم، مستقل از حالت سیستم و اقدام انتخاب شده باشد. این زمان دارای توزیع نمایی با یک نرخ ثابت است. این نرخ ثابت باید بزرگ‌تر یا مساوی با بیشینهٔ نرخ انتقال در سیستم اصلی قبل از یکسان‌سازی باشد. بیشترین نرخ انتقال در این سیستم هنگامی رخ می‌دهد که تسهیل تولیدی درحال کارکردن باشد و قیمت فروش بر پایین‌ترین قیمت یعنی p_m تنظیم شده باشد. پس نرخ انتقال در سیستم یکسان‌سازی‌شده ممکن است $\lambda_m + \mu$ باشد. در حالت‌هایی که قیمت فروش برابر p_j است و تسهیل تولیدی نیز درحال کارکردن است، سیستم با نرخ $(\lambda_m - \lambda_j)$ به همان حالت قبلی می‌رود و هنگامی‌که تسهیل تولیدی درحال کارکردن نیست، این نرخ انتقال مجازی برابر با $\mu + (\lambda_m - \lambda_j)$ است. هنگامی‌که قیمت فروش برابر با p_j است، سایر احتمالات انتقال بدین‌صورت است: انتقال بعدی با احتمال λ_{ij} ورود یک مشتری از کلاس i خواهد بود و اگر تسهیل تولیدی درحال کارکردن باشد، انتقال بعدی با احتمال μ یک تکمیل تولید خواهد بود.

ارزش متناظر با داشتن x واحد موجودی که برابر با

سود تنزیل‌شدهٔ مورد انتظار در افق زمانی نامحدود است با $v(x)$ نشان داده می‌شود. بدون ازدست‌دادن عمومیت مسئله، فرض می‌شود $\lambda_m + \mu + \alpha = 1$ بدین‌ترتیب، با روش پیوترمن [۲۲] معادلهٔ بهینگی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(۱)

$$v(x) = -h(x) + \mu \max\{v(x+1), v(x)\} + \max_{j\in\{1,2,..,m\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \max\{v(x) - c_i,\ B_{ij}v(x)\} + (\lambda_m - \lambda_j)\, v(x) \right\}$$

که در آن

$$B_{ij}v(x) = \begin{cases} v(x-1) + p_j & if\ x > 0 \\ v(x) - c_i & if\ x = 0 \end{cases}$$

در این معادلهٔ بهینگی سه عبارت بیشینه‌سازی وجود دارد. هریک از این بیشینه‌سازی‌ها در زمینهٔ یک تصمیم است. عبارت بیشینه‌سازی اول در زمینهٔ تصمیم‌گیری درمورد تولید یک واحد بیشتر یا توقف تولید است. عبارت دوم در زمینهٔ انتخاب قیمت بهینه است هنگامی‌که سطح موجودی در سیستم برابر با x باشد. قیمت انتخاب‌شده در این عبارت، نرخ ورود هریک از کلاس‌های مشتریان را تعیین می‌کند. اگر قیمت بهینهٔ انتخاب‌شده p_j باشد، نرخ ورود مشتریان کلاس i برابر با λ_{ij} است و نرخ ورود کل مشتریان λ_j است؛ بنابراین، تفاوت بین بیشینهٔ نرخ ورود ممکن یعنی λ_m و این نرخ ورود نشان‌دهندهٔ احتمال رفتن سیستم به همان حالت فعلی یعنی x است. آخرین عبارت بیشینه‌سازی در زمینهٔ تصمیم درمورد فروش به یک مشتری واردشده و ردکردن وی و نگهداشتن موجودی به‌منظور برآورده‌کردن تقاضای مشتریان مهم‌تر در آینده است.

اگر سطح موجودی $x = 0$ باشد، فقط یک گزینه وجود دارد و آن ازدست‌دادن فروش به مشتری واردشده از کلاس i است که شاید مهم‌ترین کلاس باشد. هنگامی‌که $x > 0$ باشد، در پی هر ورود به یک تصمیم درمورد فروش یا اجتناب از فروش نیاز است. فروش به مشتری واردشده سطح موجودی را به $x - 1$ کاهش می‌دهد و دریافت مبلغ p_j را به‌همراه دارد، ولی درصورتی‌که از فروش به مشتری اجتناب شود، میزان موجودی در همان سطح x باقی می‌ماند و هزینهٔ فروش ازدست‌رفته c_i به سیستم تحمیل می‌شود. در قسمت بعد، این معادلهٔ بهینگی تحلیل می‌شود و ساختار سیاست بهینه برای مسئلهٔ معرفی‌شده به‌دست می‌آید.

ساختار سیاست بهینه

به‌منظور تحلیل ساختار سیاست بهینه، ابتدا نشان داده می‌شود که $v(x)$ مقعر است. از آنجاکه $v(x)$ یک تابع برگشتی برحسب خودش است، باید نشان داده شود که اگر در تکرار اول $v(x)$ مقعر باشد این ویژگی مقعربودن در تکرار بعدی نیز باقی می‌ماند. ویژگی دیگری که لازم است در تکرارهای مختلف حفظ شود این است که برای $x \geq 0$ باید باشد $v(x) - c_1 \leq v(x-1) + p_1$. به این ویژگی نیاز است، زیرا هنگامی‌که قیمت فروش برابر با p_1 یعنی بالاترین قیمت باشد و یک مشتری از مهم‌ترین کلاس مشتریان برسد، تصمیم بهینه بی‌گمان فروش به این مشتری است؛ یعنی باید $v(x+1) - v(x) \leq c_1 + p_1$ برقرار باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع مقعر دارای این ویژگی با V نشان داده می‌شود. برای اینکه نشان داده شود اگر $v(x) \in V$ آنگاه بعد از هر تکرار، مجموعه V این خاصیت خود را حفظ می‌کند، عملگر T به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۲)

$$Tv(x) = -h(x) + \mu \max\{v(x+1), v(x)\} + \max_{p_j \in P} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \max\{v(x) - c_i,\ v(x-1) + p_j\} + (\lambda_m - \lambda_j) v(x) \right\}$$

آن‌گاه داریم:

لم ۱: اگر $v \in V$ و $h(x)$ به‌طور خطی برحسب x افزایشی باشد آن‌گاه $Tv \in V$.

قضیهٔ ۱: یک سیاست آستانه‌ای با ساختار کلی $(R_2, R_3, \dots, R_n, K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, S)$ به‌منظور جیره‌بندی، قیمت‌گذاری و تولید، بهینه است که در آن $0 \leq R_2 \leq \ldots \leq R_n \leq K_1 \leq K_2 \leq \ldots \leq K_{m-1} \leq S$

الف) سیاست موجودی پایه با سطح بیشینهٔ S برای تصمیم درمورد تولید، سیاست بهینه است.

ب) تنظیم قیمت فروش به‌صورت

$$\begin{cases} p_m & if\ K_{m-1} < x \le S \\ p_{m-1} & if\ K_{m-2} < x \le K_{m-1} \\ \vdots & \\ p_2 & if\ K_1 < x \le K_2 \\ p_1 & if\ 0 \le x \le K_1 \end{cases}$$

بهینه است.

ج) اعمال جیره‌بندی به‌صورت توقف فروش به کلاس مشتری

$$\begin{cases} n & if\ R_{n-1} < x \le R_n \\ n-1 & if\ R_{n-2} < x \le R_{n-1} \\ \vdots & \\ 3 & if\ R_2 < x \le R_3 \\ 2 & if\ 0 < x \le R_2 \end{cases}$$

و اولویت‌های پایین‌تر از آن بهینه است.

اثبات: از معادلۀ بهینگی مشخص می‌شود توقف تولید هنگامی بهینه است که $v(x+1) \le v(x)$، زیرا $v(x)$ مقعر است؛ بنابراین، یک S وجود دارد که به‌ازای آن باشد $v(S+1) - v(S) \le 0$ و این S بیشینۀ سطح برای تولید است.

در زمینۀ عبارات مربوط به تصمیم جیره‌بندی در معادلۀ بهینگی، $max\ \{v(x) - c_i, v(x-1) + p_j\}$، یک R_j وجود دارد که برای $x \ge R_j$ داریم $v(x) - c_i \le v(x-1) + p_j$ یا به‌طور معادل $v(x) - v(x-1) \le c_i + p_j$، زیرا $v(x) - v(x-1)$ نسبت به x کاهشی است.

در زمینۀ عبارت مربوط به تصمیم قیمت در معادلۀ بهینگی از خاصیت مقعربودن $v(x)$ استفاده می‌شود و نشان داده می‌شود که یک K_j وجود دارد که برای $x \ge K_j$ تصمیم بهینه این است که قیمت برابر با p_{j+1} تنظیم شود؛ یعنی

(۳)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij+1}\, max\ \{v(x) - c_i, v(x-1) + p_{j+1}\} + (\lambda_m - \lambda_{j+1}) v(x) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\, max\{v(x) - c_i, v(x-1) + p_j\} + (\lambda_m - \lambda_j) v(x)$$

در تحلیل این نامساوی به‌ازای $j = 1,2,\dots,m-1$ تعریف می‌شود:

$$c_q = \begin{cases} \max\left\{c_i \mid \max\left\{v(x) - c_i,\ v(x-1) + p_j\right\} = v(x) - c_i\right\} & \\ \varphi & if\ \max\left\{v(x) - c_i,\ v(x-1) + p_j\right\} = v(x-1) + p_j \quad for\ all\ i \end{cases}$$

و

$$c_{q'} = \begin{cases} \max\left\{c_i \mid \max\left\{v(x) - c_i,\ v(x-1) + p_{j+1}\right\} = v(x) - c_i\right\} & \\ \varphi & \max\left\{v(x) - c_i,\ v(x-1) + p_{j+1}\right\} = v(x-1) + p_{j+1} \quad for\ all\ i \end{cases}$$

در نامساوی (۳) ممکن است پنج حالت رخ دهد که در جدول ۱ نشان داده می‌شود:

جدول ۱. حالت‌های مختلف نامساوی (۳) $i, i' = 2, 3, \dots, n$

	c_q	$c_{q'}$	
حالت ۱	c_i	$c_{i'}$	$(i < i')$
حالت ۲	c_i	$c_{i'}$	$(i \ge i')$
حالت ۳	c_i	φ	
حالت ۴	φ	$c_{i'}$	
حالت ۵	φ	φ	

با تحلیل نامساوی (۳) از طریق این حالت‌ها و استفاده از ویژگی مقعربودن $v(x)$ یعنی کاهشی‌بودن $v(x) - v(x-1)$ نشان داده می‌شود که یک سطح موجودی x وجود دارد که در آن سطح این نامساوی برقرار می‌شود و به‌ازای سایر xهای بزرگ‌تر از آن نیز برقرار می‌ماند. درنتیجه، اگر میزان موجودی x از سطح مشخصی بیشتر شود، قیمت p_{j+1} نسبت به قیمت p_j درآمد بیشتری ایجاد می‌کند. درادامه مشاهده می‌شود که در میان این حالت‌ها، فقط حالت ۵ امکان رخدادن دارد و نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد که در آن تغییر سیاست روی می‌دهد. حالت ۵ یعنی هنگامی‌که تولیدکننده تقاضای همۀ کلاس‌های مشتریان را می‌پذیرد و هیچ کلاس مشتری تحت جیره‌بندی نیست، با افزایش سطح موجودی تصمیم

بهینه این است که قیمت فروش یک واحد کم شود و از p_j به p_{j+1} تغییر کند. می‌توان این تغییر قیمت را در جهت عکس نیز تعبیر کرد. بدین‌صورت که با کاهش میزان موجودی از یک سطح مشخص، قیمت فروش از p_{j+1} به p_j افزایش می‌یابد. حال این ۵ حالت مربوط به نامساوی (۳) تحلیل می‌شود و نشان داده می‌شود که چرا چهار حالت اول آن نمی‌توانند یک نقطهٔ تغییر در سیاست بهینه باشند.

حالت ۱: این حالت بیان می‌کند $c_{q'} = c_{i'}$ یعنی برای $i'-1$ داریم $max\{v(x)-c_i, v(x-1)+p_{j+1}\} = v(x-1)+p_{j+1}$. همچنین، $c_i \ge c_{i'-1}$ و $p_j > p_{j+1}$ پس داریم $max\{v(x)-c_i, v(x-1)+p_j\} = v(x-1)+p_j$ که صحیح نیست، زیرا در این حالت فرض کرده بودیم $c_q = c_i$.

حالت ۲: در این حالت با جایگذاری مستقیم در نامساوی (۳) داریم:

(۴)

$$\Lambda_{i'j+1}\big(v(x-1)+p_{j+1}\big)+\sum_{r=i'}^{n}\lambda_{rj+1}\big(v(x)-c_r\big)+\big(\lambda_m-\lambda_{j+1}\big)v(x) \ge \Lambda_{ij}\big(v(x-1)+p_j\big)+\sum_{r=i}^{n}\lambda_{rj}\big(v(x)-c_r\big)+\big(\lambda_m-\lambda_j\big)v(x)$$

می‌توان این نامساوی را به‌صورت زیر ساده کرد:

(۵)

$$v(x)-v(x-1) \le \frac{\Lambda_{i'j+1}p_{j+1}-\Lambda_{ij}p_j-\sum_{r=i'}^{n}\lambda_{rj+1}c_r+\sum_{r=i}^{n}\lambda_{rj}c_r}{\Lambda_{i'j+1}-\Lambda_{ij}} \equiv A_2$$

می‌توان نشان داد $A_2 < c_i + p_j$؛ یعنی $v(x)-v(x-1)$ که درحال کاهش است، قبل از اینکه A_2 را قطع کند، $c_i + p_j$ را قطع می‌کند و فرض این حالت تغییر می‌کند. پس این حالت رخ نمی‌دهد.

حالت ۳: این ترکیب از فرضیات نیاز دارد که داشته باشیم $v(x)-v(x-1) \le c_n + p_{j+1}$ و $v(x)-v(x-1) > c_n + p_j$ درحالی که برقراربودن هم‌زمان این دو مورد امکان‌پذیر نیست، زیرا $p_j > p_{j+1}$. پس این حالت نیز رخ نمی‌دهد.

حالت ۴: در این حالت، نامساوی (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

(۶)

$$\Lambda_{i'j+1}\big(v(x-1)+p_{j+1}\big)+\sum_{r=i'}^{n}\lambda_{rj+1}\big(v(x)-c_r\big)+\big(\lambda_m-\lambda_{j+1}\big)v(x) \ge \lambda_j\big(v(x-1)+p_j\big)+\big(\lambda_m-\lambda_j\big)v(x)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

(۷)

$$v(x)-v(x-1) \le \frac{-\lambda_j p_j+\Lambda_{i'j+1}p_{j+1}-\sum_{r=i'}^{n}\lambda_{rj+1}c_r}{\Lambda_{i'j+1}-\lambda_j} \equiv A_4$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد $A_4 < A_5$. بنابراین $v(x)-v(x-1)$ در مسیر کاهشی خود A_5 را قبل از A_4 قطع می‌کند و تصمیم بهینه طبق حالت ۵ تغییر می‌کند.

حالت ۵: در این حالت نامساوی (۳) معادل است با نامساوی زیر:

(۸)

$$\lambda_{j+1}\big(v(x-1)+p_{j+1}\big)+\big(\lambda_m-\lambda_{j'}\big)v(x) \ge \lambda_j\big(v(x-1)+p_j\big)+\big(\lambda_m-\lambda_j\big)v(x)$$

که بعد از ساده‌کردن آن داریم:

(۹)

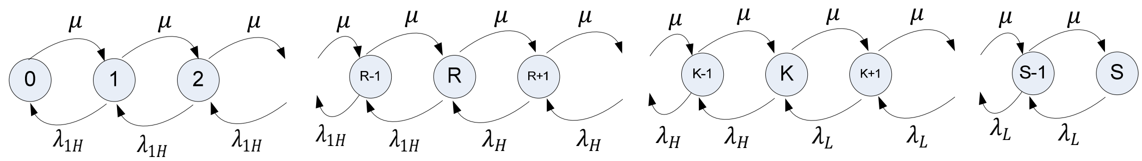
$$v(x)-v(x-1) \le \frac{\lambda_{j+1}p_{j+1}-\lambda_j p_j}{\lambda_{j+1}-\lambda_j} \equiv A_5$$

مشاهده می‌شود A_5 تنها مقداری است که $v(x)-v(x-1)$ در مسیر کاهشی خود به‌دلیل مقعربودن $v(x)$، آن را قطع می‌کند. درنتیجه، اگر هیچ کلاسی از مشتریان تحت جیره‌بندی نباشند، با افزایش سطح موجودی، قیمت از p_j به p_{j+1} کاهش می‌یابد.

مطالعهٔ عددی

به‌دلیل کاهش حجم محاسبات در مطالعهٔ عددی، سیستمی با تنها دو کلاس مشتری ۱ و ۲ درنظر گرفته می‌شود. همچنین، فقط دو قیمت درنظر گرفته می‌شود که قیمت پایین‌تر با P_L و قیمت بالاتر با P_H نشان داده می‌شود. نرخ‌های ورود مشتری نیز متناظر با این قیمت‌ها با λ_L و λ_H نشان داده می‌شود.

اگر از سیاست جیره‌بندی و قیمت‌گذاری توأم استفاده شود، می‌توان سیستم تولید را یک سیستم صف M/M/1/S تفسیر کرد که شکل ۱ زنجیرهٔ مارکوف متناظر با این سیستم صف را نشان می‌دهد. حالت سیستم نشان‌دهندهٔ میزان موجودی در سیستم است.



شکل ۱. زنجیرۀ مارکوف متناظر با سیاست ترکیبی جیره‌بندی و قیمت‌گذاری

فرض کنید π_n نشان‌دهندۀ احتمال حالت پایای سیستم برای وجود n محصول در سیستم باشد. همچنین، میانگین موجودی سیستم هنگامی‌که سطح جیره‌بندی برابر با R، سطح قیمت‌گذاری برابر با K و موجودی پایه برابر با S باشد با $I(R,K,S)$ نشان داده می‌شود. در این‌صورت، سود مورد انتظار سیستم که با $P(R,K,S)$ نشان داده شده است به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۰)

$$P(R,K,S)=\left(\sum_{n=1}^{R}\pi_n\right)\lambda_{1H}p_H+\left(\sum_{n=R+1}^{K}\pi_n\right)\lambda_H p_H+\left(\sum_{n=K+1}^{S}\pi_n\right)\lambda_L p_L-\left[hI(R,K,S)+\lambda_{1H}c_1\pi_0+\lambda_{2H}c_2\left(\sum_{n=0}^{R}\pi_n\right)\right]$$

قرار دهید $\rho_{11}=\frac{\mu}{\lambda_{1H}}$ و $\rho_1=\frac{\mu}{\lambda_H}$ و $\rho_2=\frac{\mu}{\lambda_L}$ آن‌گاه احتمالات حالت پایا طبق روابط صف M/M/1/S به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۱)

$$\pi_0=\left[1+\frac{\rho_{11}(1-\rho_{11}^R)}{1-\rho_{11}}+\rho_{11}^R\frac{\rho_1(1-\rho_1^{K-R})}{1-\rho_1}+\rho_{11}^R\rho_1^{K-R}\frac{\rho_2(1-\rho_2^{S-K})}{1-\rho_2}\right]^{-1}$$

$$\sum_{n=1}^{R}\pi_n=\pi_0\frac{\rho_{11}\left(1-\rho_{11}^R\right)}{1-\rho_{11}}$$

$$\sum_{n=R+1}^{K}\pi_n=\pi_0\rho_{11}^R\frac{\rho_1\left(1-\rho_1^{K-R}\right)}{1-\rho_1}$$

$$\sum_{n=K+1}^{S}\pi_n=\pi_0\rho_{11}^R\rho_1^{K-R}\frac{\rho_2\left(1-\rho_2^{S-K}\right)}{1-\rho_2}$$

بنابراین، داریم:

(۱۲)

$$I(R,K,S)=\sum_{n=0}^{S}n\pi_n=\pi_0\rho_{11}\left(\frac{1-\rho_{11}^R}{(1-\rho_{11})^2}-\frac{R\rho_{11}^R}{1-\rho_{11}}\right)+\pi_0\rho_{11}^R\rho_1\left(\frac{1-\rho_1^{K-R}}{(1-\rho_1)^2}-\frac{(K-R)\rho_1^{K-R}}{1-\rho_1}\right)+\pi_0\rho_{11}^R\rho_1^{K-R}\rho_2\left(\frac{1-\rho_2^{S-R}}{(1-\rho_2)^2}-\frac{(S-R)\rho_2^{S-R}}{1-\rho_2}\right)$$

به‌منظور تعریف مسائل نمونه، مقادیر مختلف درنظرگرفته‌شده برای پارامترها در جدول ۲ نشان داده می‌شود.

جدول ۲. داده‌های استفاده‌شده در مطالعۀ عددی

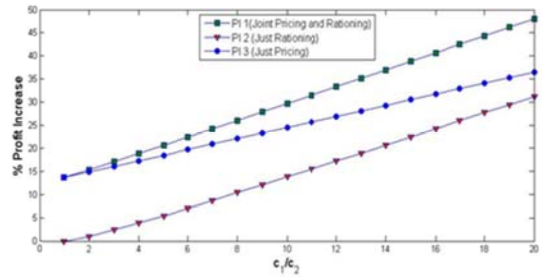
هزینه‌ها	قیمت‌ها	نرخ‌های ورود	نرخ تولید
$c_2=1$	$p_H=12$	$\lambda_{2H}=1.5$	$\mu=2.2$
		$\lambda_{1H}=1.5$	
$h=0.2$	$p_L=9$	$\lambda_{1L}=2$	
		$\lambda_{2L}=3$	

به‌منظور تحلیل عملکرد سیاست‌های مختلف نسبت به c_1/c_2 با ثابت‌بودن مقادیر پارامترهای موجود در جدول ۲، مقدار هزینۀ فروش ازدست‌رفته برای کلاس ۱ برابر با $c_1=1,2,\dots,20$ درنظر گرفته می‌شود که در این‌صورت ۲۰ مسئله نمونه ایجاد می‌شود. بعد از به‌دست‌آوردن تصمیم بهینه و مقدار سود بهینه برای هر مسئلۀ نمونه، از معیارهای بدون بعد زیر برای مقایسۀ سیاست‌های مختلف استفاده می‌شود. شکل ۲ سیاست‌های مختلف معرفی‌شده را به‌ازای مقادیر مختلف c_1/c_2 با یکدیگر مقایسه می‌کند.

$PI1$: درصد افزایش سود سیاست ترکیبی را نسبت به سیاستی که نه جیره‌بندی و نه قیمت‌گذاری می‌کند نشان می‌دهد.

$PI2$: درصد افزایش سود سیاست جیره‌بندی را نسبت به سیاستی که نه جیره‌بندی و نه قیمت‌گذاری می‌کند نشان می‌دهد.

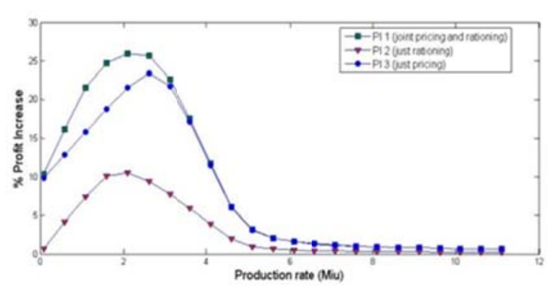
$PI3$: درصد افزایش سود سیاست قیمت‌گذاری را نسبت به سیاستی که نه جیره‌بندی و نه قیمت‌گذاری می‌کند نشان می‌دهد.



شکل ۲. درصد افزایش در سود برای سیاست‌های مختلف به‌عنوان تابعی از c_1/c_2

همان‌طورکه شکل ۲ نشان می‌دهد، سیاست ترکیبی قیمت‌گذاری و جیره‌بندی سود بیشتری را در مقایسه با دو سیاست دیگر ایجاد می‌کند. هرچه هزینهٔ فروش ازدست‌رفته برای مشتریان کلاس ۱ نسبت به کلاس ۲ بیشتر باشد، میزان مؤثربودن سیاست جیره‌بندی بیشتر می‌شود. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، هرچه هزینهٔ فروش ازدست‌رفته برای مشتریان کلاس ۱ نسبت به مشتریان کلاس ۲ بیشتر شود، تفاوت بین دو سیاست که یکی فقط از جیره‌بندی استفاده می‌کند و دیگری قیمت‌گذاری را نیز در کنار جیره‌بندی استفاده می‌کند، کمتر می‌شود. چنین نتیجه‌ای دور از ذهن نیست، زیرا هرچه تفاوت دو کلاس بیشتر شود، اهمیت جیره‌بندی بیشتر می‌شود، ولی اهمیت قیمت‌گذاری تغییری نمی‌کند و به همین دلیل درمجموع اهمیت جیره‌بندی بیشتر می‌شود.

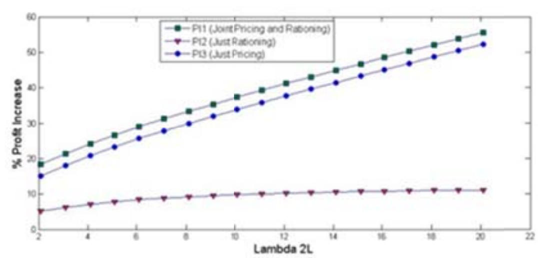
به‌منظور تحلیل عملکرد سیاست‌های مختلف با توجه به نرخ تولید، پارامتر $c_1 = 8$ ثابت درنظر گرفته می‌شود و پارامتر نرخ تولید از ۰/۲ تا ۱۱/۲ با فواصل ۰/۵ افزایش داده می‌شود. بدین‌ترتیب، ۲۴ مسئلهٔ نمونه ایجاد می‌شود که نتایج آن در شکل ۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۳. درصد افزایش سود برای سیاست‌های مختلف به‌عنوان تابعی از μ

همان‌طورکه در شکل ۳ مشاهده می‌شود، درصورتی‌که نرخ تولید نسبت به نرخ ورود مشتریان کمتر باشد، سیاست‌های مدیریت تقاضا اهمیت بیشتری دارند. درصورتی‌که نرخ تولید نسبت به نرخ تقاضا بیشتر شود، این سیاست‌ها افزایش سود خاصی ایجاد نمی‌کنند. درصورتی‌که نرخ تولید بالا باشد، سرعت تکمیل موجودی بالاست و به همین دلیل دیگر به سازوکارهای مدیریت تقاضا نیازی وجود ندارد.

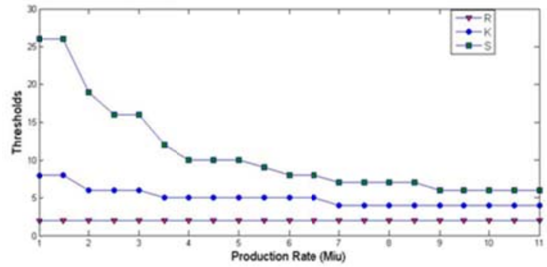
درادامه، سیاست‌های معرفی‌شده نسبت به تغییرات در نرخ ورود مشتریان تحلیل می‌شود. بدین‌منظور، مقادیر همهٔ پارامترهای مسئله ثابت درنظر گرفته شده‌اند و فقط پارامتر λ_{2L} به‌منظور تغییر در نرخ تقاضا از ۲/۱ تا ۲۰/۱ تغییر داده می‌شود. شکل ۴ نتایج مربوط به افزایش سود این سیاست‌ها را نسبت به سیاست پایه نشان می‌دهد.



شکل ۴. درصد افزایش سود سیاست‌های مختلف به‌عنوان تابعی از λ_{2L}

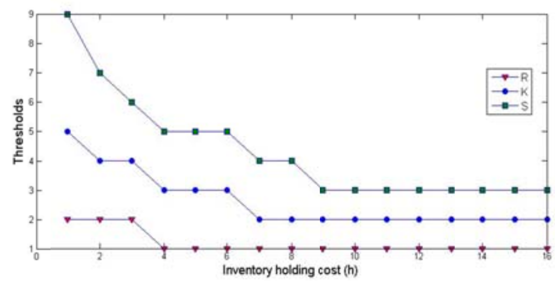
شکل ۴ نشان می‌دهد با افزایش λ_{2L}، اهمیت قیمت‌گذاری افزایش می‌یابد. علاوه‌براین، مشاهده می‌شود با افزایش نرخ تقاضا، سیاست ترکیبی جیره‌بندی و قیمت‌گذاری بر سیاست جیره‌بندی به‌شدت غلبه می‌کند.

به‌منظور تحلیل حساسیت مقدار آستانه‌ها نسبت به پارامترهای مسئله نیز از همان داده‌های موجود در جدول ۲ استفاده می‌شود. حساسیت جواب بهینه نسبت به تغییرات در پارامتر نرخ تولید μ بررسی می‌شود. همان‌طورکه در شکل ۵ مشاهده می‌شود، با افزایش نرخ تولید، سطح موجودی پایه و در پی آن آستانهٔ قیمت‌گذاری کاهش می‌یابد.



شکل ۵. تحلیل حساسیت آستانه‌ها نسبت به نرخ تولید μ

شکل ۶ رفتار جواب بهینه را نسبت به تغییرات پارامتر h نشان می‌دهد. همان‌طورکه انتظار می‌رود، هرچه هزینهٔ نگهداری موجودی بیشتر باشد، سطح موجودی پایه و آستانه‌های R و K کاهش می‌یابد.



شکل ۶. تحلیل حساسیت نسبت به پارامتر h

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این پژوهش، مسئلهٔ تصمیم‌گیری هم‌زمان درمورد جیره‌بندی و قیمت‌گذاری به‌منظور مدیریت تقاضا بررسی و تحلیل شد. این مفاهیم برای یک سیستم تولیدی با چند کلاس مشتری که از نظر هزینهٔ فروش ازدست‌رفته با یکدیگر متفاوت‌اند به‌کار گرفته شد. ساختار سیاست بهینه با استفاده از مدل‌سازی فرایند تصمیم مارکوف به‌دست آمد. این ساختار بهینه برای مسئلهٔ مورد نظر به‌صورت آستانه‌ای است و نشان داده شد درکل آستانه‌های قیمت‌گذاری بالاتر از آستانه‌های جیره‌بندی قرار می‌گیرند.

در این پژوهش یک سیستم تولیدی درنظر گرفته شد. در تحقیقات آینده، توجه به مدل‌سازی مسئله برای یک مسئلهٔ موجودی نیز بسیار مهم است؛ به‌ویژه درصورتی‌که زمان باقیمانده تا دریافت سفارش نیز یک متغیر حالت دیگر در کنار سطح موجودی درنظر گرفته شود؛ یعنی در هر لحظه حالت سیستم با سطح موجودی و زمان باقیمانده تا دریافت سفارش نشان داده شود. همچنین، می‌توان دو توسعهٔ مهم دیگر مربوط به مدل‌سازی مسئله را برای حالت کمبود عقب‌افتاده و نیز مدل‌سازی را برای حالتی که زمان تولید توزیع عمومی به‌جای توزیع نمایی داشته باشد درنظر گرفت.

مراجع

1. McGill, J.I. and VanRyzin, G.J. (1999). “Revenue Management: Research Overview and Prospects.” *Transportation Science*, Vol. 33, No. 2, PP. 233–256.

2. Gans, N. and Savin, S. (2007). “Pricing and Capacity Rationing for Rentals with Uncertain Durations.” *Management Science*, Vol. 53, No. 3, PP. 390-407.

3. Yang, C. T., Pan, Q., Ouyang, L.Y. and Teng, J. T. (2013). “Retailer's Optimal Order and Credit Policies When a Supplier Offers Either a Cash Discount or a Delay Payment Linked to Order Quantity.” *European Journal of Industrial Engineering*, Vol. 7, No. 3, PP. 370-392.

4. Frank, K. C., Zhang, R. Q. and Duenyas, I. (2003). “Optimal Policies for Inventory Systems with Priority Demand Classes.” *Operations Research*, Vol. 51, No. 6, PP. 993-1002.

5. Deshpande, V., Cohen, M. A. and Donohue, K. (2003). “A Threshold Inventory Rationing Policy for Service-Differentiated Demand Classes.” *Management Science*, Vol. 49, No. 6, PP. 683-703.

6. Arslan, H., Graves, S. C. and Roemer, T. A. (2007). “A Single-Product Inventory Model for Multiple Demand Classes.” *Management Science,* Vol. 53, No. 9, PP. 1486-1500.

7. Teunter, R. H. and Haneveld, W. K. K. (2008). “Dynamic Inventory Rationing Strategies for Inventory Systems with Two Demand Classes, Poisson Demand and Backordering.” *European Journal of Operational Research*, Vol. 190, PP. 156-178.

8. Fadiloglu, M. M. and Bulut, O. (2010). "A Dynamic Rationing Policy for Continuous-review Inventory Systems." *European Journal of Operational Research*, Vol. 202, PP. 675-685.

9. Ha, A. Y. (1997a). "Inventory Rationing in a Make-to-Stock Production System with Several Demand Classes and Lost Sales." *Management Science*, Vol. 43, No. 8, PP. 1093-1103.

10. Ha, A. Y. (1997b). "Stock-Rationing Policy for a Make-to-Stock Production System with Two Priority Classes and Backordering." *Naval Research Logistics*, Vol. 44, PP. 457-472.

11. De Vericourt, F., Karaesmen, F., Dallery, Y. (2001). "Assessing the Benefits of Different Stock-Allocation Policies for a Make-to-Stock Production System." *Manufacturing and Service Operations Management, Vol* 3, No. 2, PP. 105-121.

12. DeVericourt, F., Karaesmen, F. and Dallery, Y. (2002). "Optimal Stock Allocation for a Capacitated Supply System." *Management Science,* Vol. 48, No. 11, PP. 1486-1501.

13. Huang, B. and Iravani, S. M. R. (2008). "A Make-to-Stock System with Multiple Customer Classes and Batch Ordering." *Operations Research,* Vol.56, No. 5, PP. 1312-1320.

14. Li, Q. and Atkins, D. (2002). "Coordinating Replenishment and Pricing in a Firm." *Manufacturing and service Operations Management*, Vol. 4, No. 4, PP. 241–257.

15. Zhang, M. and Bell, P. C. (2007). "The Effect of Market Segmentation with Demand Leakage between Market Segments on a Firm's Price and Inventory Decisions." *European Journal of Operational Research*, Vol. 182, PP. 738-754.

16. Petruzzi, N. C. and Dada, M. (1999). "Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extensions." *Operations Research*, Vol. 47, PP. 183-194.

17. Chen, X. and Simchi-Levi, D. (2006). "Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies; The Continuous Review Model." *Operations Research Letters*, Vol.34, PP. 323–332.

18. Gallego, G. and Van Ryzin, G. (1994). "Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons." *Management Science*, Vol. 40, No. 8, PP. 999-1020.

19. Chew, E. P., Lee, C. and Liu R. (2009). "Joint Inventory Allocation and Pricing Decisions for Perishable Products." *International Journal of Production Economics*, Vol. 120, PP. 139-150.

20. Ahmadi, M. and Shavandi, H. (2014). "Joint Pricing and Rationing in a Production System with Two Demand Classes." *European Journal of Industrial Engineering*, Vol. 8, No. 6, PP. 836-860

21. Ahmadi, M. and Shavandi, H. (2014). "Dynamic Pricing in a Production System with Multiple Demand Classes." *Applied Mathematical Modeling*, Accepted

22. Puterman, M.L. (2005). *Markov Decision Processes, Discrete Stochastic Dynamic Programming*, Wiley, New Jersey.

23. Lippman, S. A. (1975). "Applying a New Device in the Optimization of Exponential Queuing Systems." *Operations Research*, Vol.23, No. 4, PP. 687-710.