تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودارهای کنترل g و h در حوزهٔ بهداشت و درمان

امیرحسین امیری[۱*]، فاطمه سوگندی[۲]، آزاده رفیعی طباطبایی[۳]

۱. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

۲. کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران

۳. کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور، تهران

(تاریخ دریافت: ۹۴/۸/۲۳، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده: ۹۶/۷/۱۱، تاریخ تصویب: ۹۶/۷/۲۷)

چکیده

یکی از اهداف اصلی کنترل فرایند آماری کشف زمان دقیق وقوع تغییر در فرایندها، تحت عنوان نقطهٔ تغییر است. با توجه به رابطهٔ مهندسی کیفیت و اپیدمیولوژی بیمارستانی، تخمین نقطهٔ تغییر در فرایندهای بهداشت و درمان اهمیت بسزایی دارد؛ از این‌رو در این پژوهش، ضمن ارائهٔ نمودارهای کنترل g و h برای مراقبت‌های درمانی، به تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای با استفاده از برآورد حداکثر درست‌نمایی پرداخته شده است. به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی از شبیه‌سازی مونت‌کارلو براساس معیارهای صحت و دقت استفاده شده، همچنین تعداد اعضای مجموعهٔ اطمینان و احتمال پوشش آن‌ها، براساس لگاریتم تابع درست‌نمایی ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی حاکی از آن است که تخمین‌زننده‌های پیشنهادی تحت شیفت پله‌ای، عملکردی رضایت‌بخش تحت انواع شیفت‌ها دارند.

واژه‌های کلیدی: برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی، بهداشت و درمان، کنترل فرایند آماری، تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای، نمودارهای کنترل g و h.

مقدمه

در میان ابزار هفت‌گانهٔ کنترل فرایند آماری، نمودار کنترل ابزار قدرتمندی است که به‌منظور شناسایی انحرافات تصادفی از انحرافات بادلیل استفاده می‌شود. گفتنی است شناسایی انحرافات بادلیل با استفاده از هشدارهای حاصل از نمودارهای کنترلی صورت می‌گیرد. تاکنون پژوهش‌های زیادی در این رابطه انجام شده است؛ برای مثال نورالسناء و حاجی‌احمدی [۱] به پایش ناپارامتری پروفایل‌ها با وجود همبستگی بین آن‌ها پرداختند. همچنین نمودار کنترل فاز دوم را ارائه دادند که در آن مدل اثرات آمیخته با به‌کارگیری چارچوب تحلیل واریانس هموارسازی اسپلاین با طرح کنترل هتلینگ تلفیق شده است، اما در تمام پژوهش‌های پایش، عموماً هشدارهای نمودارهای کنترلی زمان واقعی تغییر[۱] فرایندها را با تأخیر نشان می‌دهند؛ بنابراین، برآورد زمان دقیق این تغییرات سبب صرفه‌جویی در زمان و هزینه در فرایندهای صنعتی می‌شود؛ برای نمونه امین نیری و همکاران [۲] مدلی را برای تخمین نقطهٔ تغییر تدریجی در پروفایل‌های چندگانه ارائه دادند.

همچنین با رشد و توسعهٔ جوامع بشری، توجه به حفظ سلامت بشر بیش‌ازپیش جلوه می‌کند؛ به‌گونه‌ای که می‌توان گفت بهداشت و درمان جزء اولویت‌های کشورهای پیشرفته و درحال‌توسعهٔ دنیا به‌شمار می‌آید؛ از این‌رو به‌کارگیری علوم مختلف در این حوزه امری است که توجه بسیاری از پژوهشگران و متخصصان را به خود جلب کرده است. علم مدیریت کیفیت و کنترل کیفیت آماری تأثیر چشمگیری در بهبود فرایندهای مراقبتی دارد؛ برای مثال تقی‌زاده و نورالسناء [۳] ضرورت به‌کارگیری مدل‌های تعالی سازمانی را در بخش‌های بیمارستانی عنوان کردند. همچنین محمد و همکاران [۴]، نویز [۵] و تننت و همکاران [۶] به بررسی کاربرد نمودارهای کنترلی شناخته‌شده در حوزهٔ بهداشت و درمان پرداختند.

اکنون، با بررسی اجمالی رابطه بین مهندسی کیفیت و بحث اپیدمیولوژی بیمارستانی می‌توان به شباهت‌های بسیاری در مفاهیم، اصطلاحات و روش‌های به‌کاررفته در آن‌ها پی برد؛ برای مثال، در حوزهٔ بهداشت و درمان، مشخصه‌های کیفی متفاوتی وجود دارد که لازم است پایش و کنترل شود. البته پایش هر مشخصهٔ کیفی به نمودار کنترل خاصی نیاز دارد که ممکن است در گسترهٔ بسیار وسیعی از

* نویسندهٔ مسئول: تلفن: ۰۲۱۵۱۲۱۲۰۲۳ Email: amiri@shahed.ac.ir

تخصص‌های بهداشت و درمان مانند بیهوشی و مراقبت‌های ویژه، مراقبت‌های اولیه، داروهای اضطراری، رادیولوژی، داروهای مربوط به بیماری‌های داخلی، جراحی قلب، آسم، پرستاری، شیمی‌درمانی، اورولوژی و سلامت روانی به‌کار گرفته شود. در این رابطه فتاحی و همکاران [۷] در مقاله‌ای مروری اهمیت و ضرورت استفاده از روش‌های کنترل آماری را برای پایش داده‌ها، به‌خصوص پایش رخدادهای نادر در حوزهٔ بهداشت و درمان بیان کردند.

در هریک از فرایندهای درمانی، بررسی علل ایجاد چنین انحرافاتی و انجام اقدامات اصلاحی امری ضروری برای حفظ سلامت بشری است؛ بنابراین، تخمین زمان تغییر در آن‌ها اهمیت زیادی دارد. تخمین نقطهٔ تغییر در نمودارهای حوزهٔ بهداشت و درمان، موضوعی نسبتاً نوپاست که به‌تازگی عصاره و همکاران [۸] آن را بررسی کرده‌اند، همچنین پژوهشگران زیادی خلأ تحقیقاتی را در این زمینه مطرح کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به گریگ و فارول [۹] اشاره کرد. آن‌ها از روش‌های بیزی برای تخمین نقطهٔ تغییر استفاده کردند. در ارتباط بین حوزهٔ بهداشت و درمان و کیفیت، برای اولین بار کامینسکی و همکاران [۱۰] مفهوم «تعداد یا زمان بین رخدادها» را در حوزهٔ بهداشت و درمان مطرح کردند. سپس بنیان [۱۱] و [۱۲] طی دو مقالهٔ مروری به بررسی انواع نمودارهای کنترل وصفی و متغیر در حوزهٔ مراقبت‌های بهداشتی برای پایش مشخصه‌های کیفی درمانی پرداخت، همچنین وی [۱۳] عملکرد نمودارهای مبتنی بر توزیع هندسی را در حوزهٔ بهداشت و درمان [۱۴] و کاربرد نمودارهای کنترل در فرایندهای درمانی را بررسی کرد. در این رابطه، وودال [۱۵] کاربرد نمودارهای کنترل را در حوزهٔ بهداشت و درمان و برخی از مشکلات موجود در نحوهٔ استفاده از این نمودارها مطرح کرد. تر و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۰۷ مشخصه‌های کیفی گوناگونی را دسته‌بندی و مرور کردند، این مشخصه‌ها در قسمت‌های مختلف بیمارستان یا محیط درمانی به‌منظور پایش عملکرد بخش‌های مختلف یا پایش وضعیت بیماران استفاده می‌شد. فتاحی و همکاران [۱۷] و [۱۸] نمودار کنترل میانگین متحرک موزون‌نمایی جدید را برای پایش پیشامدهای نادر پیشنهاد دادند. درادامه، آن‌ها [۱۹] نمودار کنترل را با حدود احتمالی به‌جای استفاده از حدود کنترلی شوهارت برای پایش این نوع داده‌ها به‌کار بردند، همچنین [۲۰] با تابع توزیع دومتغیرهٔ پواسون به پایش رخدادهای نادر پرداختند. دوکلاس و ورین [۲۱] استفاده از نمودارهای کنترلی P را در عمل‌های بالینی توصیف کردند و نشان دادند این نوع نمودار کنترل سهم بسزایی در بهبود فرایندهای مراقبتی دارد.

از آنجا که داده‌های وصفی در محیط‌های سلامت معمولاً بیشتر از محیط‌های صنعتی و تجاری یافت می‌شود، در ادبیات موضوع، به‌کارگیری نمودارهای نسبت و تعداد نبود انطباق‌ها، همچنین تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی و واحد محصول به شکل چشمگیری از نمودارهای نوع هندسی بیشتر است، اما در برخی فرایندهای صنعتی، به‌ویژه فرایندهایی با کیفیت بالا به‌کارگیری نمودارهای کنترل یادشده، احتمال زنگ خطرهای اشتباهی را افزایش می‌دهد، همچنین در بسیاری از فرایندهای حوزهٔ بهداشت و درمان، شاخص‌هایی چون تعداد روزها یا عملیات بین دو پیشامد ناگوار مانند عفونت حاصل از جراحی، ساختاری مشابه فرایندهای باکیفیت بالا در صنعت دارد.

گفتنی است در صنعت، در شرایط وابسته‌نبودن داده‌ها و اندازهٔ نمونهٔ زیاد، به‌ترتیب از نمودارهای کنترل g و h برای کنترل تعداد بین یا زمان بین نقص‌ها، و کنترل میانگین تعداد بین یا زمان بین نقص‌ها استفاده می‌شود؛ بنابراین، متخصصان فرایندها برای پایش تعداد پیشامدهای ناگوار بیمارستانی مجاب می‌شوند از نمودارهای کنترل g یا h استفاده کنند. نمودار کنترل g در مواردی همچون کنترل تعداد جراحی‌های بین عفونت‌ها، تعداد بیماران بین دو بیمار با عارضهٔ یکسان، تعداد روزها بین اتفاقات دارویی نامطلوب یا تعداد جراحی‌های قلب باز بین عفونت‌های زخم استرنال پس از عمل جراحی استفاده می‌شود، همچنین می‌توان به نمونه‌هایی از کاربردهای نمودار کنترل h در حوزهٔ بهداشت و درمان اشاره کرد، مانند میانگین فاصلهٔ زمانی بین رخداد بیماری‌های عفونی، میانگین تعداد روزهای بین واکنش انسولین و میانگین تعداد بیماران بین عفونت‌های ناشی از سوند. علی‌رغم کاربرد فراوان نمودارهای g و h در پایش فرایندهای حوزهٔ بهداشت و درمان، مطالعه‌ای در زمینهٔ برآورد نقطهٔ تغییر این نمودارها صورت نپذیرفته است؛ از این‌رو در این پژوهش عملکرد برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی[۲] یکی از پرکاربردترین روش‌های برآورد در تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای است که در نمودارهای کنترل g و h ارزیابی شده است. ساختار ادامهٔ مقاله به این صورت است که در بخش ۳، ضمن استفاده از نمودارهای کنترل g و h به

ارائهٔ تخمین‌زننده‌های پیشنهادی پرداخته شده است. در بخش ۴ از شبیه‌سازی مونت‌کارلو[۳] برای ارزیابی عملکرد مدل‌های پیشنهادی براساس معیارهای دقت و صحت استفاده شده است، همچنین معیارهای ارزیابی مجموعهٔ اطمینان برای تخمین‌زننده‌های پیشنهادی نیز ارائه شده و در قسمت پایانی مقاله نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای تحقیقات آتی آورده شده است.

مدل پیشنهادی

در این بخش به‌تفصیل به ارائهٔ تخمین‌زننده‌های پله‌ای در نمودارهای کنترل g و h در مشخصه‌های کیفی وصفی در بهداشت و درمان پرداخته شده است.

برآورد نقطهٔ تغییر در نمودار کنترل g

درحالی‌که مشاهدات بررسی‌شده یک دنبالهٔ مستقل برنولی با احتمال شکست یکسان باشند، تعداد آزمایش‌های برنولی تا رسیدن به یک شکست، توزیع هندسی دارد. درمجموع، در تعریف توزیع هندسی از اصطلاح موفقیت استفاده می‌شود، اما در این پژوهش، بدون ازدست‌دادن عمومیت مسئله و با توجه به اینکه متخصصان به پیشامدهای ناگواری چون عفونت یا دیگر وقایع نامطلوب توجه کنند، به‌جای استفاده از احتمال موفقیت از عبارت احتمال شکست استفاده خواهیم کرد؛ برای مثال با درنظرگرفتن عفونت فعلی، احتمال آنکه عفونت بعدی در X امین مشاهده از عفونت نمونهٔ فعلی رخ دهد، از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$P(X=x)=p(1-p)^{x-a},\quad x=a,a+1,\ldots \qquad (۱)$$

p نشان‌دهندهٔ احتمال شکست (وقوع عفونت) در هر آزمایش (در هر روز) است. همچنین پارامتر a همواره معلوم و برابر مینیمم مقدار ممکن تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به مقدار مطلوب است که در این مثال معادل حداقل روزهای سپری‌شده تا وقوع عفونت بعدی است. با توجه به اینکه کاربرد نمودار کنترل g مسائل کلی‌تری از حوزهٔ بهداشت و درمان را نیز در برمی‌گیرد، یادآور می‌شویم که مثال بیان‌شدهٔ فوق حالت خاصی از فرایند کنترل‌پذیر به‌وسیلهٔ نمودار g است. برای طراحی نمودار کنترل g موارد زیر را داریم:

X_i: تعداد مشاهدات تا رسیدن به نخستین شکست؛

n: تعداد موفقیت‌ها (تعداد شکست‌ها یا وقایع نامطلوب)؛

p: احتمال شکست (احتمال وقوع یک اتفاق ناگوار)؛

L: ضریب فاصلهٔ حدود کنترل از خط مرکز.

از سوی دیگر آمارهٔ تحت پایش با نمودار g عبارت از $T=X_1+X_2+\ldots+X_n$ است. با توجه به اینکه جمع n متغیر تصادفی مستقل هندسی، متغیر تصادفی‌ای با توزیع بینم منفی می‌شود، می‌توان گفت که تابع توزیع احتمال آمارهٔ T به‌صورت زیر است:

$$P(T=t)=\binom{t-n(a-1)-1}{n-1}p^n(1-p)^{t-na},\ t=na,na+1,\ldots \qquad (۲)$$

امید ریاضی و واریانس آمارهٔ T نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E(T)=n\left(\frac{1-p}{p}+a\right),$$
$$Var(T)=\sigma_T^2=\frac{n(1-p)}{p^2}. \qquad (۳)$$

در مطالعات مربوط به حوزهٔ بهداشت و درمان، به‌علت شرایط بحرانی حاصل از پیشامدهای ناگوار و اهمیت زمان، به حالت $n=1$ بیشتر از دیگر حالت‌ها توجه می‌شود. نظر به اینکه نمودارهای بررسی‌شده در این پژوهش بر مدل شوهارت مبتنی است، خط مرکز و حدود کنترل نمودار g به‌صورت ذیل خواهد بود:

$$UCL=n\left(\frac{1-p}{p}+a\right)+L\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}},$$
$$CL=n\left(\frac{1-p}{p}+a\right), \qquad (۴)$$
$$LCL=n\left(\frac{1-p}{p}+a\right)-L\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}.$$

باید توجه داشت که در فاز ۲ پایش فرایند مقدار p در رابطهٔ ۴ معلوم است. درصورتی‌که حد کنترل پایین، مقدار منفی بگیرد حداقل مقدار پذیرفته برای T یعنی na را حد کنترل پایین درنظر خواهیم گرفت. از سوی دیگر، فرض می‌شود $i=1, 2, \ldots, k$ که نشان‌دهندهٔ بازه‌های زمانی بین هر n اتفاق بیمارستانی است، همچنین تعداد روزهای هر دوره با T_i نشان داده می‌شود. آماره‌های T_i در نمودار g پایش شده است و درصورتی‌که آمارهٔ مذکور خارج از محدودهٔ تحت کنترل قرار گیرد، نمودار g هشدار بالاتر خارج از کنترل را اعلام خواهد کرد. درصورتی‌که آمارهٔ فوق، از حد کنترل بالای نمودار قرار گیرد، نشان می‌دهد که

تعداد روزهای بین n امین اتفاق در دورهٔ قبل و دورهٔ جاری افزایش یافته که این ممکن است نتیجه‌ای مطلوب تلقی شود؛ همچنین قرارگرفتن آماره در مکانی پایین‌تر از حد کنترل پایین، نشان‌دهندهٔ وضعیت بحرانی کاهش تعداد روزهای بین دو n اتفاق متوالی است. اهمیت تخمین نقطهٔ تغییر در این نمودارها به این دلیل است که متخصصان می‌توانند با تشخیص دقیق زمانی که تغییر در خروجی‌ها روی می‌دهد، علل بالقوهٔ انحرافات بادلیل را به‌صورت کارآمدتری جست‌وجو کنند؛ زیرا از یک بازهٔ زمانی کوچک‌تر برای تشخیص این علل استفاده می‌شود.

اکنون، با توجه به برخی از عوامل مؤثر در تغییر احتمال وقوع پیشامد نامطلوب، به برآورد نقطهٔ تغییر در نمودار کنترل g خواهیم پرداخت. از این‌رو فرض می‌شود که بازه‌های زمانی بین هر n اتفاق بیمارستانی برای $i=1, 2, \ldots, \tau$ از فرایند تحت کنترل با احتمال معلوم p_0 پیروی می‌کند تا جایی که در زمان نامعلوم τ بنا به دلیل غیرتصادفی نرخ وقوع از p_0 تغییر و در سطح p_1 باقی می‌ماند تا جایی که نمودار در زمان k هشدار حالت خارج از کنترل را اعلام کند. در این صورت برای یافتن نقطهٔ تغییر p با استفاده از برآوردکننده حداکثر درست‌نمایی را خواهیم داشت:

$$L(\tau, p_1 \mid k) = \prod_{i=1}^{\tau} \binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1} p_0^n (1-p_0)^{t_i-na}$$
$$\prod_{i=\tau+1}^{k} \binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1} p_1^n (1-p_1)^{t_i-na}. \qquad (۵)$$

با بازنویسی رابطهٔ ۵ خواهیم داشت:

$$L(\tau, p_1 \mid k) = \left(\frac{p_0}{(1-p_0)}\right)^{n\tau} \times (1-p_0)^{\sum_{i=1}^{\tau} t_i} \times$$
$$\prod_{i=1}^{\tau} \binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1} \times \left(\frac{p_1}{(1-p_1)}\right)^{n(k-\tau)}$$
$$\times (1-p_1)^{\sum_{i=\tau+1}^{k} t_i} \times \prod_{i=\tau+1}^{k} \binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1}. \qquad (۶)$$

با گرفتن لگاریتم از دو طرف رابطهٔ ۶ خواهیم داشت:

$$\ln L(\tau, p_1 \mid k) = n\tau \ln\left(\frac{p_0}{(1-p_0)^a}\right) +$$
$$\ln(1-p_0)\sum_{i=1}^{\tau} t_i + \sum_{i=1}^{\tau} \ln\binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1}$$
$$+ n(k-\tau)\ln\left(\frac{p_1}{(1-p_1)^a}\right) + \ln(1-p_1)\sum_{i=\tau+1}^{k} t_i \qquad (۷)$$
$$+ \sum_{i=\tau+1}^{k} \ln\binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1}.$$

درنهایت پس از ساده‌سازی و انجام محاسبات که در پیوست الف به آن‌ها اشاره شده است، داریم:

$$\ln L(\tau, p_1 \mid k) = (k-\tau) n \ln\left(\frac{p_1(1-p_0)^a}{p_0(1-p_1)^a}\right) +$$
$$\left[\ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\bar{t}_\tau\right], \qquad (۸)$$

که در آن:

$$\bar{t}_\tau = \frac{\sum_{j=\tau+1}^{k} t_j}{k-\tau}. \qquad (۹)$$

با توجه به اینکه در رابطهٔ ۸ مقدار p_1 معلوم نیست و باید تخمین زده شود، می‌توان با گرفتن مشتق جزئی از رابطهٔ مذکور نسبت به p_1 و برابر صفر قراردادن آن، ابتدا تخمین حداکثر درست‌نمایی p_1 را محاسبه کرد سپس در رابطهٔ ۱۰ قرار داد؛ بدین ترتیب برآورد حداکثر درست‌نمایی نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودار g عبارت است از i ای که عبارت سمت راست رابطهٔ ۸ را بیشینه کند.

$$\hat{\tau} = \arg\max_{0<i<K} \left\{(k-i)n[\ln\left(\frac{\hat{p}_{1,i}(1-p_0)^a}{p_0(1-\hat{p}_{1,i})^a}\right)\right.$$
$$\left. + \ln\left(\frac{1-\hat{p}_{1,i}}{1-p_0}\right)\bar{t}_i\,]\right\}, \qquad (۱۰)$$

به‌طوری‌که:

$$\hat{p}_{1,i} = \frac{n}{\bar{t}_i}. \qquad (۱۱)$$

برآورد نقطهٔ تغییر در نمودار کنترل h

نمودار کنترل h میانگین تعداد موفقیت‌ها را تا رسیدن به اولین شکست پایش می‌کند. اگر T را تعداد موفقیت‌ها برای رسیدن به n امین شکست و X_i را تعداد موفقیت‌ها برای رسیدن به اولین شکست درنظر بگیریم، میانگین تعداد موفقیت‌ها برای رسیدن به اولین شکست (آمارهٔ نمودار کنترل h) از رابطهٔ ۱۲ محاسبه می‌شود:

$$M \equiv \frac{T}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}. \qquad (۱۲)$$

امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار M به‌صورت رابطهٔ ۱۳ خواهد بود:

$$E(M) = E(T/n) = \frac{E(T)}{n} = \left(\frac{1-p}{p} + a\right),$$

$$\sigma_M^2 = Var(M) = Var(T/n) = \frac{\mathrm{var}(T)}{n^2} = \frac{(1-p)}{np^2},$$

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{(1-p)}{np^2}}. \qquad (۱۳)$$

بدین ترتیب حدود و خط مرکز نمودار کنترل h طبق رابطهٔ قبل به‌صورت رابطهٔ ۱۴ محاسبه می‌شود:

$$UCL = \left(\frac{1-p}{p} + a\right) + L\sqrt{\frac{(1-p)}{np^2}},$$

$$CL = \left(\frac{1-p}{p} + a\right),$$

$$LCL = \left(\frac{1-p}{p} + a\right) - L\sqrt{\frac{(1-p)}{np^2}}. \qquad (۱۴)$$

به‌منظور محاسبهٔ تابع حداکثر درست‌نمایی نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودار کنترل h، آمارهٔ M یا متوسط تعداد موفقیت‌ها تا رسیدن به اولین شکست مبنای کار قرار می‌گیرد. در ادامه خواهیم داشت:

$$T = Mn \Rightarrow T \sim NB(n,p) \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}_T(t) = \binom{n+t-1}{n-1} p^n (1-p)^t, t = 0,1,\ldots \qquad (۱۵)$$

حال با استفاده از رابطهٔ قبل و براساس جایگذاری Mn به‌جای T تابع جرم احتمال آمارهٔ M به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{P}_M(m) = \binom{n+mn-1}{n-1} p^n (1-p)^{mn}, m = 0, \frac{1}{n}, \ldots \qquad (۱۶)$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرض بر این است که تا زمان نامعلوم τ ($i = 1,2,\ldots,\tau$) مقدار پارامتر احتمال شکست توزیع برابر p_0 باشد و از زمان $\tau+1$ تا k که نمودار کنترل h هشدار حالت خارج از کنترل را اعلام می‌کند، سطح پارامتر تحت پایش برابر p_1 باقی می‌ماند؛ از این‌رو تابع حداکثر درست‌نمایی نمونه‌ها عبارت است از:

$$L(\tau, p_1 \mid K) = \prod_{i=1}^{\tau} \binom{n+m_i n-1}{n-1} p_0^n (1-p_0)^{m_i n}$$

$$\times \prod_{i=\tau+1}^{k} \binom{n+m_i n-1}{n-1} p_1^n (1-p_1)^{m_i n}. \qquad (۱۷)$$

پس از گرفتن لگاریتم از طرفین، با بسط جملات و ساده‌سازی عبارات روبه‌رو می‌شویم:

$$\ln L(\tau, p_1 \mid k) = n\tau \ln p_0 + n\ln(1-p_0)\sum_{i=1}^{\tau} m_i$$

$$+n\left[(k-\tau)\ln p_1 + \ln(1-p_1)\sum_{i=\tau+1}^{k} m_i\right]. \qquad (۱۸)$$

با توجه به معلوم‌نبودن p_1 باید آن را تخمین زد سپس مقدار برآورد آن را در رابطهٔ قبل به‌کار برد؛ بدین منظور از رابطهٔ ۱۸ نسبت به p_1 مشتق می‌گیریم و درنهایت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \ln L(\tau, p_1 \mid k)}{\partial p_1} = \frac{n(k-\tau)}{p_1} - \frac{n\sum_{i=\tau+1}^{k} m_i}{1-p_1} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{1,\tau} = \frac{(k-\tau)}{\sum_{i=\tau+1}^{k} m_i + (k-\tau)}, \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری مقدار برآورد شدهٔ p_1 در رابطهٔ ۱۹ و ساده‌سازی جملات می‌توان گفت برآورد حداکثر درست‌نمایی نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودار h عبارت است از i ای که عبارت سمت راست رابطهٔ ۲۰ را بیشینه کند.

$$\hat{\tau} = \arg\max_{1 \le i < k} \left\{ n(k-i)\left[\ln\frac{\hat{p}_{1,i}}{p_0} + \bar{m}_i \ln\frac{1-\hat{p}_{1,i}}{1-p_0}\right]\right\}, \qquad (۲۰)$$

به‌طوری‌که:

$$\bar{m}_i = \frac{\sum_{j=\tau+1}^{k} m_j}{(k-\tau)}. \qquad (۲۱)$$

شبیه‌سازی عددی

به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی، از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با ۱۰ هزار تکرار براساس شاخص‌های دقت و صحت استفاده شده، همچنین مجموعه اطمینان برای این تخمین‌زننده‌ها برآورد شده است.

ارزیابی عملکرد برآوردکنندهٔ پیشنهادی در نمودار g

در این قسمت سعی بر آن است که با انجام برخی مطالعات، شبیه‌سازی عملکرد تخمین‌زنندهٔ پیشنهادی تحت شیفت پله‌ای را بررسی کنیم. ابتدا فرض می‌شود برای حالت کنترل فرایند، مقدار احتمال موفقیت در توزیع بینم منفی، برابر p_0=۰/۰۰۰۵ ، و زمان تغییر واقعی در سطح پارامتر مدنظر i=۱۰۰ انتخاب شده است؛ بدین ترتیب مشاهدات تا دورهٔ زمانی ۱۰۰ ام از یک توزیع بینم منفی با تعداد ثابت و مشخصی از موفقیت‌ها (n) و p_0 تولید شده و برای $i \ge$ ۱۰۱ تا زمانی که نمودار کنترل، هشدار خارج از کنترل را اعلام کند، مقدار پارامتر p_1، در سطحی متفاوت از p_0 ثابت خواهد ماند. شبیه‌سازی‌های عددی به ازای مقادیر مختلف احتمال موفقیت در هر آزمایش (p)، و سه مقدار متفاوت برای تعداد موفقیت‌ها شامل n=۱ ، n=۲ و n=۳

صورت گرفته و تمام معیارهای ارزیابی برآوردکننده به ازای هریک از مقادیر p و n محاسبه شده است، همچنین مقدار ضریب حدود کنترل برای هر سطح از n به‌گونه‌ای تنظیم شده است که متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل برابر ۳۷۰ باشد. جداول ۱ و ۲ به‌ترتیب برای $p_1>p_0$ و $p_1<p_0$ دربرگیرندهٔ اطلاعات مرتبط با متوسط مشاهدات تا رسیدن به هشدار خارج از کنترل یا $E(k)$، امید ریاضی برآوردها یا $\bar{\hat{\tau}}$ و خطای استاندارد یا $se(\hat{\tau})$ برآوردها است.

در جداول مذکور، ستون اول نشان‌دهندهٔ مقادیر خارج از کنترل پارامتر احتمال موفقیت است. ستون‌های ۲ تا ۱۰ نیز به سه بخش و براساس مقدار n دسته‌بندی شده‌اند. در جدول ۱ با توجه به عملکرد ضعیف نمودار g در شناسایی شیفت‌های افزایشی در p، متأسفانه اجرای شبیه‌سازی برای مقدار $p=$ ۰/۰۰۰۹ به ازای $n=$۲ و $n=$۳ در زمانی معقول امکان‌پذیر نیست؛ به همین دلیل برای سطر مربوط به این دو حالت بدون نتیجه است. با این حال نتایج نشان می‌دهد صحت برآوردها تقریباً با فاصله‌گرفتن از مقدار تحت کنترل p بهبود می‌یابد. همچنین به ازای مقادیر $p_1=$۰/۰۰۰۲، $p_1=$۰/۰۰۰۳ و $p_1=$۰/۰۰۰۴ با افزایش مقدار n، صحت برآوردها زیاد می‌شود، البته این روند برای مقادیر دیگر p_1 به‌دلیل نزدیکی بسیار زیاد برآوردها تقریباً متوقف شده و برآوردها برای مقادیر دیگر پارامتر مذکور در یک سطح هستند. با توجه به جدول ۱ افزایش مقدار هریک از دو پارامتر p و n، موجب افزایش مقدار متوسط مشاهدات تا دریافت هشدار خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار می‌شود، همچنین در جدول ۲ مشاهده می‌شود که با کاهش p و فاصله‌گرفتن از مقدار تحت کنترل، متوسط طول نمونه‌گیری تا بروز هشدار یا $E(k)$ کاهش، و صحت برآوردها نیز بهبود می‌یابد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در حالت افزایش این پارامتر علی‌رغم افزایش چشم‌گیر $E(k)$ عملکرد برآوردکننده بسیار پذیرفته خواهد بود.

علاوه‌بر استفاده از معیارهای ارزیابی تخمین‌زنندهٔ نقطهٔ تغییر، مدل پیشنهادی با مدل نورالسناء و همکاران [۲۲] مقایسه شده است. درواقع، آن‌ها عملکرد برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی را برای فرایندهایی با کیفیت بالای مبتنی بر توزیع هندسی بررسی کردند، از سوی دیگر با توجه به اینکه توزیع هندسی را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از توزیع بینم منفی درنظر گرفت، در صورت $n=$۱ در این توزیع، ممکن است عملکرد برآوردکنندهٔ پیشنهادی این پژوهش در برآورد نقطهٔ تغییر پله‌ای در چنین فرایندی، حداقل با نتایج حاصل از عملکرد پیشنهادی نورالسناء و همکاران [۲۲] برابر باشد؛ بدین ترتیب به‌منظور ارزیابی عملکرد این دو روش در برآورد نقطهٔ تغییر، شکل ۱ از نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی به‌دست آمده است. $E(k)$ و $\bar{\hat{\tau}}$ طبق روش آن‌ها به‌ترتیب با $E(k)_N$ و $a\ hat_N$ و برای روش پیشنهادی به ترتیب با $E(k)$ و $a\ hat$ نشان داده شده است. با توجه به روند نمودارهای شکل مذکور می‌توان نتیجه گرفت که علاوه‌بر عمومیت روش پیشنهادی به مدل آن‌ها، این تخمین‌زننده عملکرد بهتری داشت. همچنین، برای ۵ شعاع همسایگی مختلف دقت برآوردکننده، Pr_c، یا $\hat{P}(|\hat{\tau}-\tau|\le c)$ در جداول ۳، ۴ و ۵ محاسبه شده است. منظور از دقت c احتمال این است که فاصلهٔ تخمین‌زننده از نقطهٔ واقعی تغییر کوچک‌تر یا مساوی c باشد؛ برای مثال برای c برابر ۰، تعداد برآوردهایی که دقیقاً برابر زمان واقعی تغییر باشند شمارش، و بر تعداد کل شبیه‌سازی‌ها تقسیم می‌شود. اکنون، ضمن معرفی مجموعهٔ اطمینان برای تخمین‌زنندهٔ پیشنهادی، شاخص‌های تعداد عناصر مجموعه اطمینان و احتمال پوشش آن‌ها بررسی شده است؛ بنابراین، متوسط تعداد عناصر مجموعه و نسبت دفعات پوشش در ۱۰ هزار بار شبیه‌سازی مستقل مونت‌کارلو در جداول ۶ و ۷ برای مثال به ازای $n=$۱ به ازای مقادیر مختلف p و D نشان داده شده است.

در جداول مقدار مرجع D به‌صورت عدد ثابت انتخاب شده است. به‌طورکلی مجموعهٔ اطمینان[۴] برای این یک تخمین‌زننده براساس باکس و کاکس [۲۳] به‌صورت زیر است:

$$CS=\{i:\log_e L(t)>\log_e L(\hat{\tau})-D\}, \qquad (۲۲)$$

که در آن $\log_e L(\hat{\tau})$ ماکزیمم لگاریتم تابع درست‌نمایی به ازای تمام نقاط بالقوه نقطهٔ تغییر است.

جدول ۱. صحت برآوردکنندهٔ نقطهٔ تغییر پله‌ای، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار g

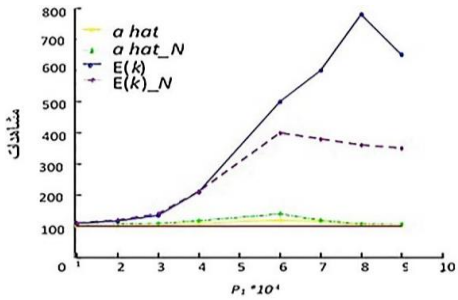
$\tau = 100، N = 10000، p_0 = 0.0005، p_1 > p_0.$

p_1	n=۱			n=۲			n=۳		
	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$
۰/۰۰۰۶	۹۱۸/۱۳	۱۴۰/۲۷	۱/۱۶	۱۷۷۹/۵۳	۱۰۶/۲۸	۰/۶۳	۲۰۶۳/۰۱	۱۰۰/۹۱	۰/۴۵
۰/۰۰۰۷	۱۲۲۰/۸	۹۸/۷۳	۰/۴۱	۷۳۶۷/۴۸	۹۸/۳۹	۰/۲۲	۱۱۰۴۳/۴۳	۹۸/۲۸	۰/۱۵
۰/۰۰۰۸	۱۲۷۳/۹	۹۹/۴۴	۰/۲۳	۳۲۷۶۴/۶۴	۹۹/۴۷	۰/۲۱	۶۳۰۸۸/۸	۹۹/۸۱	۰/۲۸
۰/۰۰۰۹	۱۱۹۹/۸	۹۹/۵۹	۰/۱۶	-	-	-	-	-	-

جدول ۲. صحت برآوردکنندهٔ نقطهٔ تغییر پله‌ای، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار g

$\tau = 100، N = 10000، p_0 = 0.0005، p_1 < p_0.$

p_1	n=۱			n=۲			n=۳		
	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$
۰/۰۰۰۴	۲۳۰/۴۴	۱۴۸/۲۴	۰/۷۴	۱۸۹/۳	۱۲۳/۱۶	۰/۴۳	۱۷۳/۵۴	۱۱۳/۹	۰/۳۱
۰/۰۰۰۳	۱۳۹/۰۹	۱۰۶/۶۳	۰/۲	۱۲۲/۳۲	۱۰۲/۵	۰/۱۲	۱۱۶/۰۶	۱۰۱/۷	۰/۰۹
۰/۰۰۰۲	۱۱۱/۷۴	۱۰۱/۰۴	۰/۰۹	۱۰۶/۰۹	۹۹/۹۶	۰/۰۷	۱۰۴/۲۱	۹۹/۶۳	۰/۰۶
۰/۰۰۰۱	۱۰۳/۰۴	۹۹/۸۱	۰/۰۶	۱۰۱/۹۴	۹۹/۵۵	۰/۰۵	۱۰۱/۴۸	۹۹/۶۴	۰/۰۴



شکل ۱. مقایسهٔ عملکرد برآوردکنندهٔ پیشنهادی در نمودار کنترل g و برآوردکننده در نورالسناء و همکاران [۱۲]

جدول ۳. دقت تخمین‌زننده تحت تغییر پله‌ای در نمودار g (n=۱)

p_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۴۶	۰/۲۳	۰/۰۹	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۴
Pr_1	۰/۷	۰/۴۲	۰/۱۹	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۱
Pr_2	۰/۸۲	۰/۵۴	۰/۲۶	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۱۵
Pr_3	۰/۸۹	۰/۶۳	۰/۳۳	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۲
Pr_4	۰/۹۲	۰/۷	۰/۳۸	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۲۳
Pr_5	۰/۹۴	۰/۷۵	۰/۴۳	۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۲۷

جدول ۴. دقت تخمین‌زننده تحت تغییر پله‌ای در نمودار g (n=۲)

p_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۶۶	۰/۳۸	۰/۱۶	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۸
Pr_1	۰/۸۷	۰/۶۱	۰/۳۲	۰/۰۸	۰/۰۷	۰/۱۹
Pr_2	۰/۹۳	۰/۷۴	۰/۴۳	۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۲۷
Pr_3	۰/۹۶	۰/۸۱	۰/۵۱	۰/۱۶	۰/۱۴	۰/۳۴
Pr_4	۰/۹۷	۰/۸۶	۰/۵۷	۰/۱۹	۰/۱۷	۰/۴
Pr_5	۰/۹۷	۰/۹	۰/۶۲	۰/۲۲	۰/۲	۰/۴۴

جدول ۵. دقت تخمین‌زننده تحت تغییر پله‌ای در نمودار g (n=۳) .

p_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۷۸	۰/۴۸	۰/۲۲	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۱۲
Pr_1	۰/۹۳	۰/۷۲	۰/۴۱	۰/۱۲	۰/۱۰	۰/۲۵
Pr_2	۰/۹۶	۰/۸۳	۰/۵۳	۰/۱۷	۰/۱۵	۰/۳۵
Pr_3	۰/۹۸	۰/۸۹	۰/۶۲	۰/۲۲	۰/۱۹	۰/۴۳
Pr_4	۰/۹۸	۰/۹۲	۰/۶۸	۰/۲۶	۰/۲۲	۰/۴۹
Pr_5	۰/۹۹	۰/۹۴	۰/۷۴	۰/۳۰	۰/۲۶	۰/۵۴

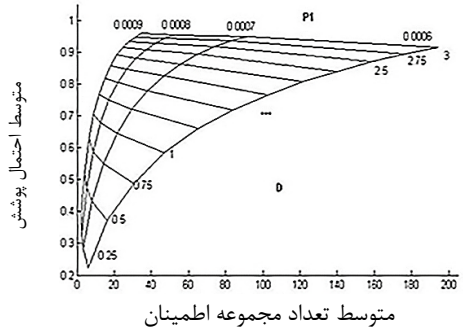
جدول ۶. متوسط تعداد عناصر مجموعهٔ اطمینان برای شیفت پله‌ای ساده، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار g

D \ P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
۰/۲۵	۱/۲۵	۱/۴۷	۱/۸۸	۲/۸۳	۶/۰۷	۳/۴۵
۰/۵	۱/۵۸	۲/۱۸	۳/۴۶	۶/۴۵	۱۶/۲۸	۸/۱۷
۰/۷۵	۲/۰۳	۳/۱۶	۵/۵۵	۱۱/۵۹	۳۰/۳۹	۱۴/۲۲
۱	۲/۶۲	۴/۳۷	۸/۱۴	۱۸/۱۹	۴۷/۰۱	۲۱/۴
۱/۲۵	۳/۳۵	۵/۸۲	۱۱/۲	۲۵/۹۲	۶۵/۱	۲۹/۴
۱/۵	۴/۱۹	۷/۴۹	۱۴/۴۹	۳۴/۶۳	۸۳/۸۹	۳۷/۹۸
۱/۷۵	۵/۱۶	۹/۳۲	۱۸/۴۸	۴۳/۴۹	۱۰۲/۷۴	۴۶/۹۲
۲	۶/۲۲	۱۱/۳۲	۲۲/۶۴	۵۳/۶۶	۱۲۱/۳۳	۵۵/۹۸

جدول ۷. احتمال پوشش مجموعه‌ها به ازای مقادیر مختلف D برای شیفت پله‌ای ساده، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار g

D \ P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۵	۰/۳	۰/۱۵	۰/۲۲	۰/۲۸
۰/۵	۰/۸	۰/۵۸	۰/۴	۰/۲۴	۰/۳۷	۰/۴۳
۰/۷۵	۰/۸۳	۰/۶۵	۰/۶۹	۰/۳۲	۰/۴۹	۰/۵۵
۱	۰/۸۷	۰/۷۲	۰/۵۷	۰/۳۹	۰/۵۸	۰/۶۵
۱/۲۵	۰/۹	۰/۷۸	۰/۶۴	۰/۴۶	۰/۶۶	۰/۷۲
۱/۵	۰/۹۳	۰/۸۳	۰/۷	۰/۵۲	۰/۷۲	۰/۷۸
۱/۷۵	۰/۹۴	۰/۸۷	۰/۷۵	۰/۵۷	۰/۷۷	۰/۸۳
۲	۰/۹۶	۰/۹	۰/۷۹	۰/۶۳	۰/۸۱	۰/۸۶

در نتایج شبیه‌سازی می‌توان مشاهده کرد که به ازای یک مقدار ثابت از p_1، با افزایش مقدار مرجع D یا به عبارت دیگر با افزایش اختلاف بین مقدار بیشینهٔ لگاریتم تابع حداکثر درست‌نمایی و مقدار مورد نظر برای تهیهٔ مجموعهٔ اطمینان، تعداد عناصر مجموعه افزایش می‌یابد. این روند برای مقدار مشخصی از D و با فاصله‌گرفتن از p_0 به‌صورت عکس رخ می‌دهد؛ زیرا مقادیر تفاوت قابل توجه لگاریتم تابع حداکثر درست‌نمایی به ازای p های بزرگ در مقایسه با p های کوچک‌تر است، با این حال با بررسی نتایج می‌توان به‌وضوح مشاهده کرد که به ازای مقدار مشخصی از p و با افزایش مقدار مرجع، احتمال دربرگرفتن نقطهٔ واقعی تغییر به‌وسیلهٔ مجموعهٔ اطمینان افزایش می‌یابد؛ برای مثال در جدول ۷ به ازای p_1=۰/۰۰۷ و D=۱/۵ احتمال دربرگرفتن دورهٔ زمانی ۱۰۰ به‌وسیلهٔ مجموعه برابر ۰/۷۸ و برای D=۲ برابر ۰/۸۶ است. شکل زیر نیز نشان‌دهندهٔ رویه‌های متناظر با مقادیر شاخص‌های تعداد عناصر مجموعهٔ اطمینان و احتمال پوشش[5] آن‌ها، مجموعه‌های اطمینان و به ازای مقادیر مختلف p و D های کوچک‌تر یا مساوی ۳ است.



شکل ۲. رویه‌های متناظر با مقادیر شاخص‌های تعداد عناصر و احتمال پوشش مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف p و D در نمودار g

ارزیابی عملکرد برآوردکنندهٔ پیشنهادی در نمودار h

در اینجا نیز به‌منظور ارزیابی عملکرد برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودار h، از شبیه‌سازی‌های عددی استفاده شده است. گفتنی است، برای دردست‌داشتن ابزار مقایسهٔ عملکرد روش پیشنهادی در دو نمودار g و h، مقادیر پارامترها و شرایط شبیه‌سازی، مشابه شبیه‌سازی‌های نمودار g خواهد بود، همچنین مقادیر مختلف p_1 از ۰/۰۰۰۱ تا ۰/۰۰۰۸ تغییر خواهد کرد. شبیه‌سازی‌ها برای ۳ مقدار ۱، ۲ و ۳ برای پارامتر تعداد موفقیت‌ها (n)، صورت می‌گیرد، همچنین نقطهٔ تغییر واقعی، دورهٔ زمانی ۱۰۰ خواهد بود؛ بنابراین تا این دوره نمونه‌ها از فرایند بینم منفی با پارامترهای $NB(n, 0.0005)$ و برای نمونه ۱۰۱ تا دریافت هشدار خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار h، مشاهدات از فرایند خارج از کنترل با پارامترهای $NB(n, p_1)$ تولید خواهند شد.

صحت عملکرد برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی به‌ازای مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر p در مقایسه با مقدار تحت کنترل و برای هر سه مقدار پارامتر n، در جداول ۸ و ۹ گردآوری شده‌اند. در ستون این دو جدول، مقادیر خارج از کنترل پارامتر p ثبت شده، همچنین ۹ ستون دیگر براساس مقادیر n به سه قسمت مشابه تقسیم شده است؛ ستون‌های اول تا سوم آن به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ $E(k)$، $\bar{\hat{\tau}}$ و انحراف معیار متوسط برآوردهاست. جداول به‌خوبی نشان می‌دهد که به ازای مقادیر p_1=۰/۰۰۰۳ ، p_1=۰/۰۰۰۴ و p_1= ۰/۰۰۰۶ و با افزایش مقدار پارامتر n متوسط برآوردها به‌صورت محسوسی بهبود می‌یابد؛ به‌طوری‌که به ازای p_1=۰/۰۰۰۶ از مقدار ۱۴۰/۹۶ برای n=۱ به مقدار ۱۰۰/۵۳ برای n=۳ تغییر می‌کند. برای دیگر مقادیر خارج از کنترل p با توجه به نزدیک‌بودن مقادیر $\bar{\hat{\tau}}$ به نقطهٔ واقعی تغییر شاید بتوان گفت عملکرد برآوردکننده، به‌صورت چشمگیری از مقدار پارامتر n تأثیر نمی‌پذیرد، همچنین طبق نتایج شبیه‌سازی واضح است که در هر دو جدول و به ازای هریک از مقادیر مشخص n، با فاصله‌گرفتن از مقدار تحت کنترل ۰/۰۰۰۵ برای پارامتر p، امید ریاضی برآوردها صحیح‌تر می‌شود. علاوه‌بر این، به‌منظور نمایش عملکرد برآوردکننده براساس شاخص توزیع تجربی برآوردها از جداول ۱۰ الی ۱۲ استفاده شده است که ستون اول در آن‌ها نشان‌دهندهٔ شعاع همسایگی مدنظر و ستون‌های دوم تا آخر و به ازای تمام مقادیر خارج از کنترل p، نشان‌دهندهٔ احتمال قرارگرفتن برآورد نقطهٔ تغییر در شعاع

متناظر در ستون اول است. درادامه، با معرفی مجموعهٔ اطمینان برای تخمین‌زنندهٔ پیشنهادی در نمودار کنترل h، شاخص‌های تعداد عناصر مجموعه اطمینان و احتمال پوشش براساس لـگاریتم تابع درست‌نمایی نیز بررسی شده است؛ بنابراین، متوسط تعداد عناصر مجموعه و نسبت دفعات پوشـــش در ۱۰ هزار بار شبیه‌سازی مستقل مونت‌کارلو در جـــداول ۱۳ و ۱۴ به ازای مقادیر مختلف p و D نشان داده شده است. باید توجه داشت که در اینجا هم مقادیر پارامترهای شبیه‌سازی مشابه نمودارهای کنترل g انتخاب شده است تا بتوان عملکرد این دو روش پیشنهادی را تحت شرایط یکسان با یکدیگر مقایسه کرد. همچنین این نتایج به ازای n=۱ نشان داده شده است؛ زیرا در این حالت نمودارهای کنترل h و g معادل یکدیگر می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی برای این دو شاخص نشان می‌دهد که عملکرد برآوردکننده در نمودار h با رفتار آن در نمودار g مشابه است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در تمام جداول مرتبط با شاخص تعداد اعضای مجموعهٔ اطمینان، به ازای یک مقدار ثابت از p_1، با افزایش D، تعداد عناصر مجموعه افزایش می‌یابد، البته این روند برای یک مقدار مشخص از D و با فاصله‌گرفتن از p_0 به‌صورت عکس رخ می‌دهد؛ به بیان دیگر با افزایش یا کاهش مقدار p تعداد عناصر مجموعهٔ اطمینان به ازای یک مقدار ثابت D کاهش می‌یابد و این به دلیل مقادیر تفاوت قابل توجه لگاریتم تابع حداکثر درست‌نمایی به ازای p های بزرگ در مقایسه با p های کوچک‌تر است. با این حال با بررسی جداول مرتبط با احتمال پوشش نقطهٔ واقعی تغییر به‌وسیلهٔ مجموعه‌های اطمینان می‌توان مشاهده کرد که به ازای یک مقدار مشخص از p و با افزایش مقدار مرجع، احتمال دربرگرفتن نقطهٔ واقعی تغییر در مجموعهٔ اطمینان افزایش می‌یابد. شکل زیر نشان‌دهندهٔ رویه‌های متناظر با مقادیر شاخص‌های تعداد اعضا و احتمال پوشش مجموعهٔ اطمینان و به ازای مقادیر مختلف p و Dهای کوچک‌تر یا مساوی با ۳ است.

جدول ۸. صحت برآوردکنندهٔ نقطهٔ تغییر پله‌ای، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار h

$$\tau = 100،\ N = 10000،\ p_0 = 0.0005،\ p_1 > p_0.$$

P_1	n=۱			n=۲			n=۳		
	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$
۰/۰۰۰۶	۹۲۶/۲۶	۱۴۰/۹۶	۱/۱۵	۱۷۲۷/۳۹	۱۰۸/۴۸	۰/۶۴	۲۰۵۲/۲۵	۱۰۰/۵۳	۰/۴۵
۰/۰۰۰۷	۱۲۱۵/۷۶	۹۸/۷۵	۰/۴۱	۷۳۳۷/۹۸	۹۸/۷۱	۰/۲۳	۱۱۴۰۹/۰۶	۹۸/۲۷	۰/۱۵
۰/۰۰۰۸	۱۲۸۳/۵۶	۹۸/۵۵	۰/۲۴	۳۲۱۳۱/۱۳	۹۸/۴۷	۰/۲۶	۶۶۹۸۸/۴۱	۹۹/۱	۰/۱۷

جدول ۹. صحت برآوردکنندهٔ نقطهٔ تغییر پله‌ای، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار h

$$\tau = 100،\ N = 10000،\ p_0 = 0.0005،\ p_1 < p_0.$$

P_1	n=۱			n=۲			n=۳		
	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$	$E(k)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$se(\hat{\tau})$
۰/۰۰۰۴	۲۲۵/۵۶	۱۴۹/۰۱	۰/۷۳	۱۹۰/۵۷	۱۲۲/۹۴	۰/۴۳	۱۷۴/۲۲	۱۱۴/۱۹	۰/۳۲
۰/۰۰۰۳	۱۳۹/۵۲	۱۰۶/۸۸	۰/۱۹	۱۲۲/۷۴	۱۰۲/۳۱	۰/۱۲	۱۱۶/۱۷	۱۰۲/۰۶	۰/۱
۰/۰۰۰۲	۱۱۱/۷۸	۱۰۱/۰۴	۰/۱	۱۰۶/۱۷	۱۰۰/۱۱	۰/۰۶	۱۰۴/۲۴	۹۹/۶۲	۰/۰۶
۰/۰۰۰۱	۱۰۳/۴۵	۹۹/۶۵	۰/۰۷	۱۰۱/۹۶	۹۹/۵۷	۰/۰۵	۱۰۱/۴۹	۹۹/۵۶	۰/۰۴

جدول ۱۰. دقت تخمین‌زنندهٔ تغییر پله‌ای در نمودار h، n=۱.

P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۴۷	۰/۲۲	۰/۰۸	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۴
Pr_1	۰/۷۲	۰/۴	۰/۱۸	۰/۰۴	۰/۰۴	۰/۱
Pr_2	۰/۸۳	۰/۵۳	۰/۲۶	۰/۰۷	۰/۰۶	۰/۱۶
Pr_3	۰/۸۹	۰/۶۲	۰/۳۲	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۲
Pr_4	۰/۹۲	۰/۶۹	۰/۳۸	۰/۱۱	۰/۰۹	۰/۲۴
Pr_5	۰/۹۴	۰/۷۴	۰/۴۳	۰/۱۳	۰/۱۱	۰/۲۸

جدول ۱۱. دقت تخمین‌زنندهٔ تغییر پله‌ای در نمودار h ، n=۲.

P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۶۶	۰/۳۶	۰/۱۶	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۸
Pr_1	۰/۸۶	۰/۶	۰/۳	۰/۰۹	۰/۰۶	۰/۱۸
Pr_2	۰/۹۳	۰/۷۳	۰/۴۱	۰/۱۳	۰/۱	۰/۲۶
Pr_3	۰/۹۶	۰/۸۱	۰/۴۹	۰/۱۷	۰/۱۴	۰/۳۳
Pr_4	۰/۹۷	۰/۸۷	۰/۵۶	۰/۲	۰/۱۷	۰/۳۹
Pr_5	۰/۹۷	۰/۹	۰/۶۱	۰/۲۳	۰/۱۹	۰/۴۳

جدول ۱۲. دقت تخمین‌زنندهٔ تغییر پله‌ای در نمودار h، n=۳.

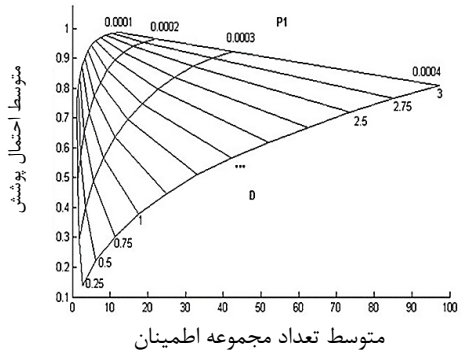
p_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
Pr_0	۰/۷۷	۰/۴۸	۰/۲۱	۰/۰۵	۰/۰۴	۰/۱۲
Pr_1	۰/۹۲	۰/۷۳	۰/۴۱	۰/۱۱	۰/۱	۰/۲۵
Pr_2	۰/۹۶	۰/۸۴	۰/۵۳	۰/۱۷	۰/۱۵	۰/۳۵
Pr_3	۰/۹۷	۰/۹	۰/۶۱	۰/۲۱	۰/۱۹	۰/۴۳
Pr_4	۰/۹۸	۰/۹۳	۰/۶۹	۰/۲۵	۰/۲۳	۰/۴۹
Pr_5	۰/۹۸	۰/۹۵	۰/۷۳	۰/۲۹	۰/۲۶	۰/۵۵

جدول ۱۳. متوسط تعداد عناصر مجموعهٔ اطمینان برای شیفت پله‌ای ساده پس از هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار h

D \ P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
۰/۲۵	۱/۲۴	۱/۴۸	۱/۸۷	۲/۷۵	۶/۱۷	۳/۴۵
۰/۵	۱/۵۸	۲/۱۹	۳/۴۴	۶/۲۵	۱۶/۳۹	۸/۱۴
۰/۷۵	۲/۰۱	۳/۱۸	۵/۵۷	۱۱/۲۳	۳۰/۳۷	۱۴/۲۱
۱	۲/۵۹	۴/۴	۸/۱۷	۱۷/۵۴	۴۶/۹	۲۱/۳۹
۱/۲۵	۳/۳	۵/۸۱	۱۱/۲۱	۲۴/۸۹	۶۴/۸۱	۲۹/۳۱
۱/۵	۴/۱۴	۷/۴۲	۱۴/۷	۳۳/۲	۸۳/۶۲	۳۷/۸۸
۱/۷۵	۵/۰۹	۹/۲۴	۱۸/۴۲	۴۲/۲۴	۱۰۲/۶۹	۴۶/۷۲
۲	۶/۱۷	۱۱/۲۷	۲۲/۵۹	۵۲/۵۴	۱۲۱/۴۷	۵۵/۷۶

جدول ۱۴. احتمال پوشش مجموعه‌ها به ازای مقادیر مختلف D برای شیفت پله‌ای ساده، پس از دریافت هشدار حالت خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار h

D \ P_1	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۷
۰/۲۵	۰/۷۶	۰/۴۹	۰/۲۹	۰/۱۴	۰/۲۲	۰/۲۹
۰/۵	۰/۸	۰/۵۷	۰/۴	۰/۲۲	۰/۳۸	۰/۴۴
۰/۷۵	۰/۸۴	۰/۶۵	۰/۴۹	۰/۳	۰/۵	۰/۵۶
۱	۰/۸۸	۰/۷۲	۰/۵۷	۰/۳۸	۰/۵۹	۰/۶۵
۱/۲۵	۰/۹	۰/۷۷	۰/۶۴	۰/۴۵	۰/۶۷	۰/۷۳
۱/۵	۰/۹۳	۰/۸۲	۰/۷	۰/۵۱	۰/۷۲	۰/۷۹
۱/۷۵	۰/۹۴	۰/۸۶	۰/۷۵	۰/۵۷	۰/۷۷	۰/۸۳
۲	۰/۹۶	۰/۹	۰/۸	۰/۶۲	۰/۸۱	۰/۸۶

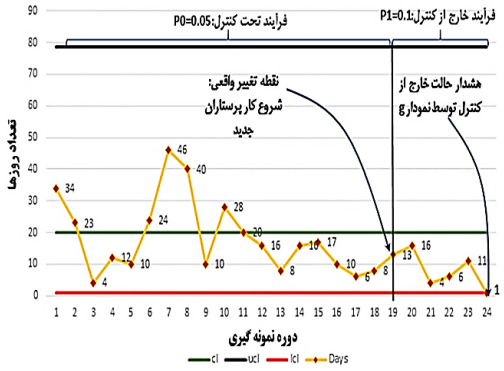


شکل ۳. رویه‌های متناظر با مقادیر شاخص‌های تعداد عناصر و احتمال پوشش مجموعهٔ اطمینان به ازای مقادیر مختلف p و D در نمودار h.

مثال کاربردی

در این قسمت، به‌منظور نشان‌دادن عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی از مثالی کاربردی استفاده می‌شود. در بیشتر موارد یکی از وقایع مهم پزشکی در طول فرایند جراحی پیوند کلیه، احتمال وقوع عفونت برای بیمار است که نقش بسزایی در روند کاهش بهبود یا بروز خطرات جدی‌تر برای او دار و. شناسایی هرچه سریع‌تر عفونت کمک شایانی به پیشروی‌نکردن آن می‌کند؛ بنابراین، نیاز است در ابتدا با استفاده از دریافت هشدار از نمودار کنترل g بروز پیشامد عفونت اطلاع‌رسانی شود. عوامل مختلفی در تغییر احتمال عفونت یک فرایند جراحی نقش دارد که باید آن‌ها را شناخته و حذف کرد. شناخت نقطهٔ واقعی تغییر تأثیر بسزایی در تشخیص عوامل عفونت‌زایی دارد؛ بنابراین، نیاز است به برآورد نقطهٔ تغییر در نمودار کنترل g پرداخته شود.

ابتدا فرض می‌شود برای حالت کنترل فرایند، مقدار احتمال موفقیت در توزیع بینم منفی، برابر p_0=۰/۰۵، و زمان تغییر واقعی در سطح پارامتر مدنظر i=۲۰ انتخاب شده است؛ بدین ترتیب مشاهدات تا دورهٔ زمانی بیستم از یک توزیع بینم منفی با تعداد ثابت و مشخصی از موفقیت‌ها (n=۱) و p_0 تولید شده و برای بیست‌ویکم تا زمانی که نمودار کنترل، هشدار خارج از کنترل را اعلام کند، مقدار پارامتر p_1 در سطحی متفاوت از p_0 ثابت خواهد ماند. شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از مدل تخمین نقطهٔ تغییر ارائه‌شده انجام شده است و نقطهٔ هشدار و تغییر تخت تغییر ۰/۰۵ افزایشی در p_0 به‌ترتیب برابر با ۲۴ و ۱۹ است. همچنین مقدار ضریب حدود کنترل به‌گونه‌ای تنظیم شده است که متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل برابر ۳۷۰ باشد. در این مثال، پس از شناسایی علل می‌توان با ایجاد سیستم‌های مؤثر مراقبت، استقرار مقررات و مصوبه‌هایی به‌منظور کاهش خطر ابتلا به عفونت‌های بیمارستانی، فراهم‌کردن و مداومت برنامه‌های آموزشی برای کارکنان بیمارستان و... نرخ وقوع عفونت‌های بیمارستانی را کاهش داد، اما در صورت بی‌توجهی به موارد مذکور احتمال رخداد پیشامدهای نامطلوب مثل عفونت‌های بیمارستانی افزایش می‌یابد. در شکل ۴ با استفاده از نمودار کنترل g، پایش احتمال عفونت در جراحی نشان داده شده است.



شکل ۴. زمان اعلام هشدار خارج از کنترل به‌وسیلهٔ نمودار g و زمان تغییر واقعی فرایند

نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای مطالعات آتی

تأخیر در شناسایی نقطهٔ تغییر در فرایندهای صنعتی سبب افزایش هزینه‌های تولیدی می‌شود، اما دیر شناختن دلایل انحراف در مراقبت‌های بهداشتی به فجایع انسانی منجر می‌شود؛ زیرا در صورت شیوع یک بیماری و گذشتن از یک مرز زمانی، برخلاف فرایندهای صنعتی امکان توقف فرایند برای شناسایی عوامل تأثیرگذار وجود ندارد؛ بنابراین، می‌توان با شناسایی به‌موقع عواملی که سبب تغییر در فرایند شده‌اند، این مشکل را برطرف کرد. در این میان، تخمین نقطهٔ تغییر ما را در این مهم یاری می‌کند؛ بنابراین، در این مقاله با استفاده از روش پرکاربرد برآوردکنندهٔ حداکثر درست‌نمایی به توسعهٔ مدلی برای تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای در نمودارهای کنترل g و h که کاربردهای بسیاری در حوزهٔ بهداشت و درمان دارند، پرداخته شده است. به‌منظور ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی از شبیه‌سازی مونت‌کارلو براساس معیارهای صحت و دقت استفاده شد. درادامه، تعداد عناصر مجموعهٔ اطمینان و احتمال پوشش آن‌ها در مجموعهٔ اطمینان نیز ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تخمین‌زننده‌های پیشنهادی تحت شیفت پله‌ای، عملکرد رضایت‌بخشی دارند.

برای پیشنهادهای آتی می‌توان به برآورد نقطهٔ تغییر روند خطی و غیرخطی، همچنین مونوتونیک در نمودارهای کنترل g و h اشاره کرد. علاوه‌بر این، به‌کارگیری فنون دیگری مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی[۶]، خوشه‌بندی و طبقه‌بندی در برآورد نقطهٔ انواع تغییر در این نمودارها توسعه‌هایی از این کار است.

پیوست الف) نحوهٔ محاسبهٔ لگاریتم تابع درست‌نمایی در نمودار کنترل g

در انجام محاسبات برای دستیابی به رابطهٔ ۸ در این مقاله، جملهٔ اول و دوم رابطهٔ ۷ را به‌صورت آنچه در روابط ۱۳ و ۱۴ بیان شده است، بسط می‌دهیم:

$$n\tau \ln\left(\frac{p_0}{(1-p_0)^a}\right) = nk \ln\left(\frac{p_0}{(1-p_0)^a}\right) - n(k-\tau)\ln\left(\frac{p_0}{(1-p_0)^a}\right). \quad \text{(الف-۱)}$$

و

$$\ln(1-p_0)\sum_{i=1}^{\tau} t_i = \ln(1-p_0)\sum_{i=1}^{k} t_i - \ln(1-p_0)\sum_{i=\tau+1}^{k} t_i. \quad \text{(الف-۲)}$$

با توجه به روابط (الف-۱) و (الف-۲) و حذف جملات ثابت $nk\ln\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)$ و $\sum_{i=1}^{k}\ln\binom{t_i-(a-1)n-1}{n-1}$, $\ln(1-p_0)\sum_{i=1}^{k} t_i$ لگاریتم تابع حداکثر درست‌نمایی به‌صورت رابطهٔ ۸ می‌شود.

منابع

1. Hajahmadi, F., and Noorossana, R. (2015). “Profiles non-parametric monitroring and make a dicision on quality process using mix effects models”, *Journal Industrial Engineering* , Vol. 50, No. 1, PP. 13-22.
2. aminnayeri, M., Mohammadi, B., and Ayoubi, M. (2013). “Change point estimation on multiple profiles under drift shifts under mean process”, *Journal Industrial Engineering* , Vol. 48, Special Issue, PP. 63-71.
3. Taghizadeh, A. and Noorossana, R. (2011). “The necessity of re-conceptualizing the European foundation for quality management’s (EFQM) excellence model for the health care sector and its use in the Iranian national productivity and excellence award”, *Hospital*, Vol. 10, No. 2, PP. 46-61.
4. Mohammed, M.A., Worthington, P., and Woodall W.H. (2008). “Plotting basic control charts: tutorial notes for healthcare practitioners”, *Quality and Safety Health Care*, Vol. 17, No. 1, PP. 137-145.

5. Noyes, L. (2009). “Cusum techniques and funnel plots. A review of methods for monitoring performance in healthcare”, *Interactive cardiovascular and thoracic surgery*, Vol. 9, No. 3, PP. 494-499.
6. Tennant, R., and et al., (2013). “Monitoring patients using control charts: a systematic review”, *International journal for quality in healthcare*, Vol. 19, No. 4, PP. 187-194.
7. Fatahi, A.A., et al., (2011). “A review on statistical monitoring of rare events and their necessity in healthcare area”, *Payesh*, Vol. 10, No. 4, PP. 429- 437.
8. Assareh, H., Smith, I., and Mengersen, K. (2011). “Bayesian change point detection in monitoring cardiac surgery outcomes”, *Quality Management in Healthcare*, Vol. 20, No. 3, PP. 207-222.
9. Grigg, O., and Farewell, V. (2004). “An overview of risk-adjusted charts”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, Vol. 167, No. 3, PP. 523-539.
10. Kaminsky, F.C., Benneyan J.C., and Davis R.D. (1992). “Statistical control charts based on Geometric distribution”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 2, PP. 63-69.
11. Benneyan, J.C. (1998). “Statistical quality control methods in infection control and hospital epidemiology, Part 2: chart use, Statistical Properties and Research Issues”, *Statistics for Hospital Epidemiology*, Vol. 19, No. 4, PP. 265-283.
12. Benneyan, J.C., (1998). “Statistical quality control methods in infection control and hospital epidemiology, Part 1: Introduction and Basic Theory”, *Statistics for Hospital Epidemiology*, Vol. 19, No. 3, pp. 194-214.
13. _____, (2001). “Number-between g-type statistical quality control charts for monitoring adverse events”, *Health Care Management Science*, Vol. 4, No. 4, PP. 305-318.
14. Benneyan, J.C., Lloyd, R.C., and Plsek, P.E. (2003). “Statistical process control as a tool for research and healthcare improvement”, *Quality Safety in Health Care*, Vol. 12, No. 6, PP. 458-464.
15. Woodall, W.H. (2006). “The use of control charts in health-care and Public-Health surveil- lance”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 38, No. 2, PP. 89-104.
16. Thor, J., et al., (2007). “Application of statistical process control in healthcare improvement: systematic review”, *Quality Safety in Health Care*, Vol. 16, No. 5, PP. 387-399.
17. Fatahi, A., et al., (2011). “Zib-EWMA control chart for monitorring rare health”, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, Vol. 11, No. 4, PP. 881-895,
18. Fatahi, A., et al., (2012). “Zero inflated Poisson EWMA control chart for monitoring health-related events”, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, Vol. 12, No. 4, PP. 43-57.
19. Fatahi, A.A., et al., (2010). “Truncated zero inflated binomial control chart for monitoring rare health events”, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, Vol. 4, No. 4, PP. 380-387.
20. Fatahi, A.A., Noorossana, R., and Dokouhaki, P., (2012). “Copula-Based Bivariate ZIP Control Chart for Monitoring Rare Events”, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 41, No. 15, PP. 2699-2716.
21. Duclos, A., and Voirin, N. (2010). “The p-control chart: a tool for care improvement”, *International Journal for Quality in Health Care*, Vol.4, No, 2. PP. 1-6.
22. Noorossana, R. and Shadman, A, (2009). “Estimating the change point of a normal process mean with a monotonic change”, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, No. 1, PP. 79-90,
23. Box, G. and Cox, D., (1964). “An analysis of transformations”, *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 26, No. 2, PP. 211–243.

واژه‌های انگلیسی به‌ترتیب استفاده در متن

1. Change Point
2. Maximum Likelihood Estimation
3. Monte Carlo Simulation
4. Cardinality
5. Coverage Probabilty
6. Artificial Neural Network